Universidad Continental

Guía de Trabajo

Matemática Superior

Percy Rojas Laura

Contenido

Presentación

Esta guía de Matemática Superior se erige como un faro en el vasto océano del conocimiento matemático, brindando claridad y dirección a aquellos que desean dominar los conceptos avanzados de esta disciplina. Su importancia radica en su capacidad para proporcionar un camino estructurado y comprensible hacia el dominio de temas cruciales en matemáticas, que son fundamentales para una variedad de campos académicos y profesionales en las facultades de las ingenierías. Esta recopilación de ejercicios está destinada para los alumnos del segundo periodo de la Universidad Continental, cada ejercicio está seleccionado, permitiendo preparar y capacitar debidamente al estudiante para seguir sus estudios superiores. La formación básica de los estudios impartidos en la universidad, en el área de Ciencias y Formación General, son muy importantes y la asignatura de Matemática Superior, juega un rol fundamental, debido a los avances de los temas que comprende esta materia y que están relacionados a las especialidades que brinda la Universidad.

La guía abarca una amplia gama de temas, desde la definición de funciones reales en variable real, sus respectivas gráficas y más. Explora conceptos clave como límites de una función, sistemas de ecuaciones lineales, su interpretación geométrica y métodos de resolución de los mismos, entre otros. Cada sección está cuidadosamente estructurada para facilitar la comprensión y el dominio progresivo de los temas.

Por ello, tenemos como resultado de aprendizaje de la asignatura:

Al finalizar la asignatura, el estudiante será capaz de resolver problemas de funciones, matrices y límites aplicando métodos y recursos apropiados.

Asimismo, estas guías de aprendizaje se han dividido en cuatro unidades y que son:

Unidad I **:** Funciones, funciones polinomiales y racionales

Unidad II **:** Funciones trascendentes

Unidad III **:** Matrices

Unidad IV **:** Límites de funciones reales

Para aprovechar lo máximo estas guías, recomendamos a los estudiantes:

1. **Práctica regular**: Dedica tiempo regularmente para practicar los problemas propuestos en cada sección. La práctica constante es clave para afianzar los conceptos y mejorar tus habilidades de resolución de problemas.
2. **Consulta recursos adicionales**: No dudes en consultar libros de texto adicionales, videos explicativos y recursos en línea para reforzar tu comprensión de los temas más complejos.
3. **Colaboración y discusión**: Trabaja en grupo con tus compañeros de estudio o busca la orientación de un tutor si encuentras dificultades en algún tema. La discusión y la colaboración pueden proporcionar nuevas perspectivas y ayudarte a superar obstáculos.
4. **Persistencia y paciencia**: La matemática superior puede ser desafiante en ocasiones, pero mantén la persistencia y la paciencia. Cada obstáculo superado te acercará más a la maestría en el tema.
5. **Aplicaciones prácticas**: Intenta relacionar los conceptos matemáticos con situaciones de la vida real o aplicaciones en tu campo de interés. Esto te ayudará a comprender la relevancia y el impacto de lo que estás aprendiendo.

Percy Rojas Laura

Primera **Unidad**

Funciones, funciones polinomiales y racionales

Semana 1: Sesión 2

Funciones: Definición, dominio y rango

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: ….. minutos
Docente: .... Unidad: 1
Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas tomando en cuenta la importancia de las funciones, determinando el dominio y rango, además de sus gráficas.

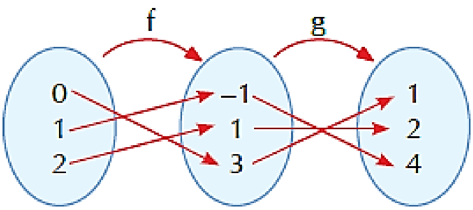
II. Descripción de la actividad por realizar

Funciones: definición y regla de correspondencia

1. Determina el valor de: $a+b+f_{(11)}$, si
$$f=\left\{(2;7),(-1;-5),(2;2a-b),(-1;b-a),(a+b^2;a)\right\}$$
representa una función.

2. Si la siguiente función f, tal que $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, además:
$$f=\left\{(7;\sqrt{x}),(x;4x),(7;2x),(x^2;x),(x^3;x)\right\}$$
Determina el valor de: $f_{(x)}+f_{(x^2)}+f_{(x^3)}$.

3. Sean f y g dos funciones, donde:



Determina el valor de: $g_{(f_{(1)})} + f_{(g_{(2)})} + g_{(f_{(0)})}$

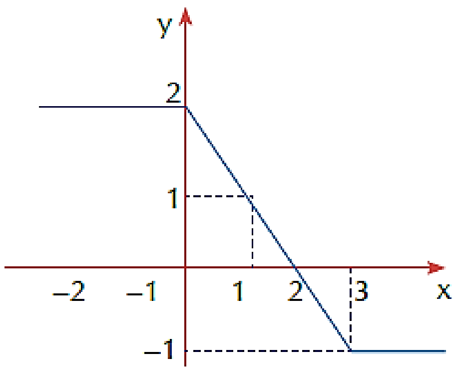
4. Si los puntos $(2;m)$ y $(n;7)$ pertenecen a la función $f_{(x)} = 4x+3$. Determina el valor de: mn

5. Sea la siguiente función:

$$f_{(x)} = x^2 - 3x + 2m$$

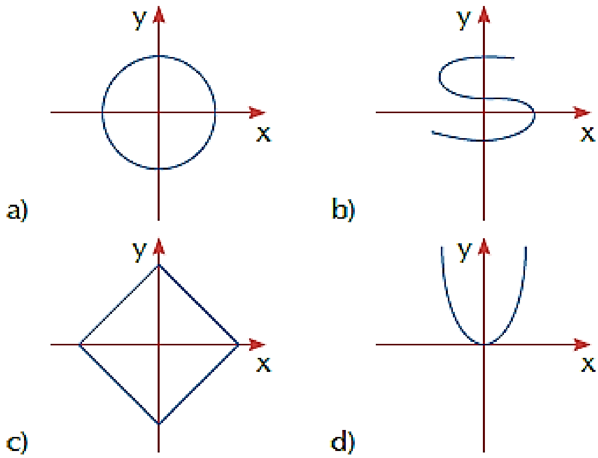
donde $(5;20) \in f$. Determina el valor de la imagen de -3 mediante " f ".

6. Sea la gráfica de la función f:



Determina el valor de: $f_{(-1)} + f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + f_{(4)}$

7. De los siguientes gráficos:



¿cuáles representa una función?

8. **Costo de producción:** El costo C en dólares de producir x yardas de cierta tela se expresa mediante la función:

$$C_{(x)} = 1500 + 3x + 0,02x^2 + 0,0001x^3$$

a. Determina: $C_{(10)}$ y $C_{(100)}$

b. ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?

c. Calcula $C_{(0)}$. (Este número representa los costos fijos) **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

9. **Flujo de sangre:** Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). La fórmula que da v como una función de r se llama ley **del flujo laminar.** Para una arteria con radio 0.5 cm, se tiene.

$$V_{(x)} = 18500\left(0,25 - r^2\right) \quad ; \quad 0 \le r \le 0,5$$

a) Determine $V_{(0,1)}$ y $V_{(0,4)}$

b) ¿Qué indican las respuestas del inciso a) acerca del flujo de sangre en esta arteria?

c) Construya una tabla de valores de $V_{(r)}$ para r = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5

Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)

10. **Compras por Internet:** Una librería por internet cobra $15 por envío para pedidos menores a $100 o más, pero el envío es gratis para pedidos de $ 100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x de los libros comprados dada por:

$$C_{(x)} = \begin{cases} x+15 & ; \quad si \ x < 100 \\ x & ; \quad si \ x \geq 100 \end{cases}$$

a) Encuentre C(75), C(90), C(100) Y C(105)

b) ¿Qué representan las respuestas al inciso a)? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Funciones: dominio y rango

1. Determina el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = 2x - 5 \quad ; \quad si \quad -4 \leq x < 5$

b) $f_{(x)} = 2 - 3x \quad ; \quad si \quad -6 \leq x < 3$

c) $f_{(x)} = \dfrac{10}{x-3} \quad ; \quad si \quad 4 \leq x < 13$

d) $f_{(x)} = 1 - \dfrac{3}{2x-1} \quad ; \quad si \quad -1 \leq x < 0$

e) $f_{(x)} = \dfrac{x-2}{x+2} \quad ; \quad si \quad -1 \leq x < 3$

2. Determina el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = x^2 + 4 \quad ; \quad si \quad -7 \leq x < -2$

b) $f_{(x)} = x^2 + 5 \quad ; \quad si \quad -2 \leq x < 3$

c) $f_{(x)} = x^2 - 6 \quad ; \quad si \quad -5 \leq x < 3$

d) $f_{(x)} = (x+2)^2 + 2 \quad ; \quad si \quad -5 \leq x < -1$

e) $f_{(x)} = x^2 - 6x + 5 \quad ; \quad si \quad -1 \leq x < 3$

3. Determina el dominio y rango de las siguientes:

a) $f_{(x)} = \dfrac{2x-4}{x-3}$

b) $f_{(x)} = \dfrac{4x-5}{2x-3}$

c) $f_{(x)} = (x-3)^2 + 5$

d) $f_{(x)} = x^2 - 4x + 6$

e) $f_{(x)} = -x^2 - 8x + 5$

4. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = \sqrt{x-2} + \sqrt[4]{7-x} + \dfrac{3x}{x-5}$

b) $f_{(x)} = \dfrac{\sqrt{2x-6} + 3x}{x-3} + \sqrt{\dfrac{1}{15-3x}} + 2x$

5. Determina el dominio de las siguientes funciones:

c) $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 7x + 12} + \dfrac{2x-3}{x^2 - 8x + 15}$

d) $f_{(x)} = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} + \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6} + 2$

6. Determina el conjunto de preimágenes de la función:

$$f_{(x)}=\sqrt{\frac{x-4}{x^2-2x-15}}+\frac{3}{x^2+1}$$

7. Determina el dominio de la función:

$$f_{(x)}=\sqrt{x^2+\sqrt{\frac{x}{x+4}-\frac{1}{x+1}}}$$

8. Determina el dominio de la función:

$$f_{(x)}=\frac{\sqrt{2x-3}}{[\![2-x]\!]}$$

9. Determina el rango de la función:

$$f_{(x)}=\frac{1}{|x-1|-|x-2|}$$

10. Sea $f:\langle 1;+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f_{(x)}=\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

Determina el rango.

Semana 2: Sesión 2

Gráfica de funciones, funciones definidas por partes, transformaciones y álgebra de funciones

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 1
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante utiliza e interpreta las funciones definidas por trozos, álgebra de funciones y funciones compuestas, así como funciones uno a uno y sus inversas en la resolución de problemas

II. Descripción de la actividad por realizar

Gráfica de funciones

1. Grafica las siguientes funciones:

   a) $f_{(x)} = 5$

   b) $f_{(x)} = (x-2)(x+2) - x^2$

c) $f_{(x)} = 4 \quad ; \quad si \quad -2 \le x < 3$

d) $f_{(x)} = -\sqrt{3} \quad ; \quad si \quad -1 < x < 3$

2. Grafica las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = 2x - 8$

b) $f_{(x)} = 6 - 3x$

c) $f_{(x)} = 2x - 5 \quad ; \quad si \quad -1 \le x < 4$

d) $f_{(x)} = 4 - 2x \quad ; \quad si \quad -2 \le x < 3$

3. Grafica las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = |x - 3| + 2$

b) $f_{(x)} = |2x - 6| - 2 \quad ; \quad si \quad 4 < x \le 6$

c) $f_{(x)} = -|x - 2| + 5$

d) $f_{(x)} = -2|x - 4| + 1 \quad ; \quad si \quad 2 \le x < 6$

4. Grafica las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = -x^2 + 3$

b) $f_{(x)} = -(x - 3)^2 + 5$

c) $f_{(x)} = x^2 - 6x + 3$

d) $f_{(x)} = -(x - 3)(x + 5)$

e) $f_{(x)} = x^2 - 8x + 7 \quad ; \quad si \quad -1 < x \le 8$

5. Grafica las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = \sqrt{x - 3} - 2$

b) $f_{(x)} = \sqrt{4-x} + 1$

c) $f_{(x)} = -\sqrt{x-3} + 5$

d) $f_{(x)} = -\sqrt{2-x} + 1 \quad ; \quad si \quad -7 < x < 1$

e) $f_{(x)} = \sqrt{4-x^2}$

f) $f_{(x)} = -\sqrt{25-x^2}$

6. Determine el área de la región limitada por las gráficas de las funciones

$$f_{(x)} = |x-3| - 1 \quad ; \quad g_{(x)} = 4 - 2x$$

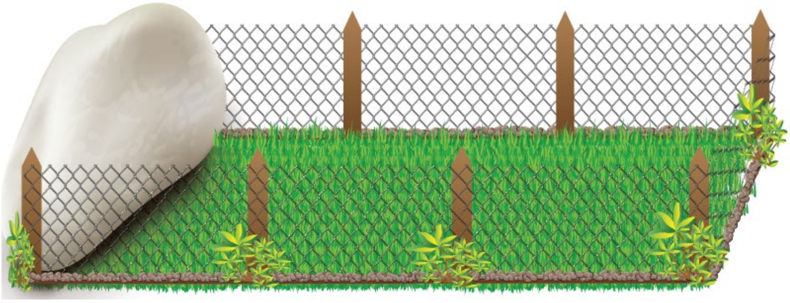
y el eje Y.

7. El camino recorrido por Juan hacia la Universidad Continental está representado por la gráfica de la función $f_{(x)} = |x-3| + 5 \quad ; \quad x \in [-1;6]$ en plano XY. Si cada unidad en dicho plano representa 1 km, determina la distancia recorrida por Juan.

8. Si la gráfica de la función cuadrática $f_{(x)} = x^2 + ax + b$ interseca al eje de las abscisas en los puntos $-3 \wedge 5$, determina:

a) El vértice de la parábola generado por f.
b) El punto de intersección con el eje de las ordenadas.
c) El rango de la función.

9. Se debe construir un corral rectangular utilizando como uno de sus muros una roca para economizar malla de cerco. Determine las dimensiones del área máxima del corral si se dispone de 18 metros de malla para cercar. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**



10. Un jugador de Golf intenta alcanzar Green con un lanzamiento en que la pelota describe una trayectoria parabólica. La altura que alcanza está dada por la función cuadrática:

$$h_{(t)} = -3t^2 + 20t + 10$$

Donde: h es la altura en metros, t está en segundos. Grafique y responda:

a) ¿Qué altura alcanza la pelota en 3 segundos?

b) ¿Cuál es la altura máxima?

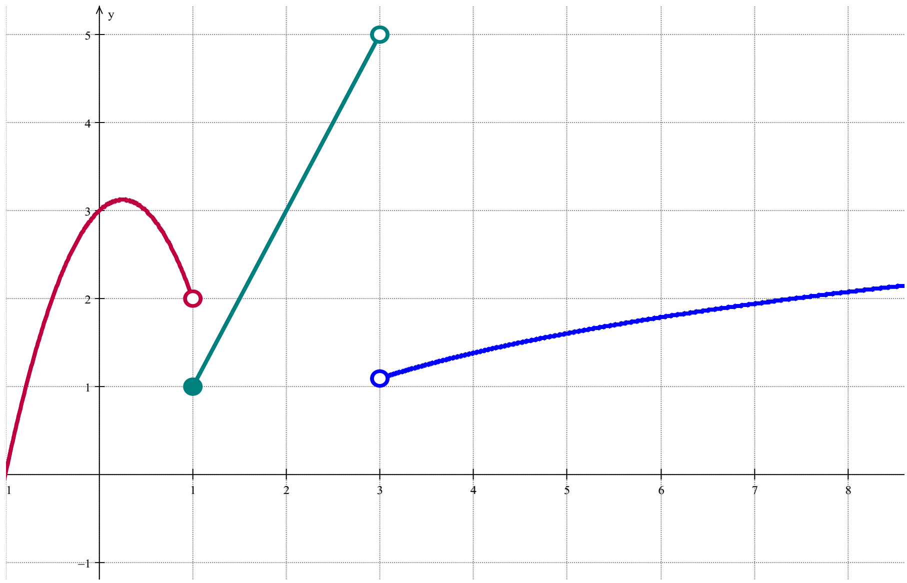
c) ¿En qué tiempo la pelota toca el piso?

d) Si la pelota alcanza una altura de 2m ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)

Funciones definidas por partes

1. Determine el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, teniendo en cuenta la gráfica de la función F definida por partes:



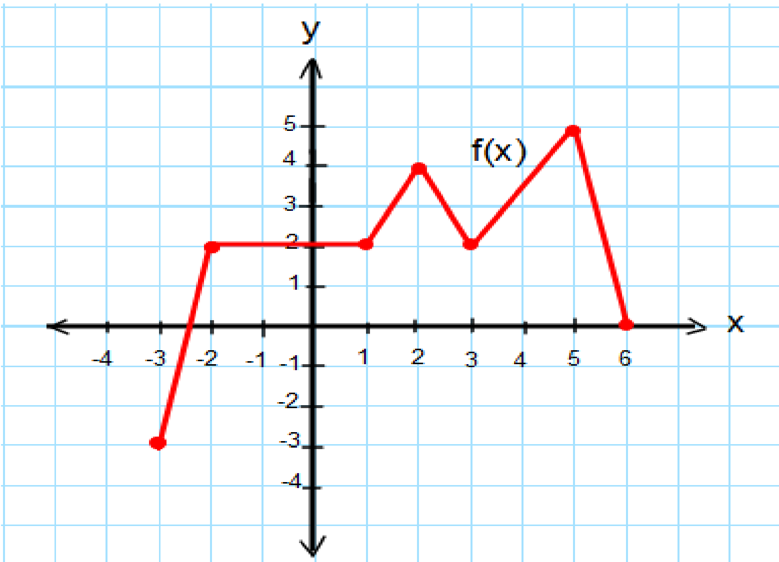
I. $Dom(F) = \langle -\infty\ ; 1] \cup \langle 1\ ; 3\rangle \cup \langle 3 ; \infty +\rangle$

II. $Ran(F) = \langle -\infty\ ; \infty +\rangle$

III. $Dom(F) = \langle -\infty\ ; \infty +\rangle - \{3\}$

IV. $Ran(F) = \langle -\infty\ ; 3\ ] \cup [\ 3 ; 5\rangle$

2. Determine el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, teniendo en cuenta la siguiente gráfica:



I. f es creciente en el intervalo $[5\,;\,6]$

II. f es decreciente en el intervalo $[2;3]$

III. $f(-3) = f(3)$

IV. $f(2) > f(6)$

V. $f(-2) = -f(3)$

3. Bosqueja la gráfica de la función definida por partes y determinar su dominio y rango.

a) $f(x) = \begin{cases} x-3 & ; \quad x \leq -3 \\ \sqrt{x+2} & ; \quad -2 < x < 4 \\ -1 & ; \quad 4 \leq x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x+4| & ; \quad x \leq -2 \\ x^2 - 1 & ; \quad -2 < x \leq 3 \\ -2 & ; \quad 3 \leq x \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x+3| & ; \quad x \leq -1 \\ x^2 + 1 & ; \quad -1 < x \leq 3 \\ \sqrt{x} & ; \quad 4 \leq x \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}-1 & ; \quad x\le -3 \\ x^2+2 & ; \quad -2<x<4 \\ x-1 & ; \quad 4\le x \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & ; \quad x\le -3 \\ \sqrt{x+3} & ; \quad -3<x<2 \\ x-2 & ; \quad 2\le x \end{cases}$

4. Considerando la función definida por partes:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2 & ; \; si \;\; -3<x\le 2 \\ -5-\frac{x}{2} & ; \; si \;\; 2<x\le 5 \\ |x-7| & ; \; si \;\; x>5 \end{cases}$$

a) Determina el dominio y rango.
b) Determine los intervalos creciente y decreciente de la gráfica.
c) Bosqueja la gráfica de f.

5. Dada la función definida por partes en los intervalos dados:

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & ; \; si \;\; x<-2 \\ x+3 & ; \; si \;\; -2\le x<0 \\ x^2+1 & ; \; si \;\; 0\le x<3 \\ |x-5| & ; \; si \;\; 3\le x<10 \end{cases}$$

a) Bosqueje la gráfica de f(x).
b) Determina el dominio y rango.
c) Determine los intervalos creciente y decreciente.

6. **Multas por exceso de velocidad:** En cierto estado la velocidad máxima permitida en las autopistas es 95 millas/h y la mínima es 20. La multa F por violar estos límites es $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.
a) Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes, donde “x” es la velocidad a la que conduce una persona.
b) Determine F (10), F (70) y F (115)
c) ¿Qué representa cada una de sus respuestas?

d) Grafique la función definida por partes. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

7. Una librería por internet cobra s/35 por envío para pedidos menores a s/150, pero el envío es gratis para pedidos de s/150 a menores de s/ 500 y para pedidos a partir de s/500, el envío es gratis y le descuentan s/70 por la compra. El costo C de un pedido es una función del precio total x de los libros comprados dada por:
   a) Determine la función que representa la compra de libros.
   b) Encuentre C(110) , C(140), C(150) y C(640)
   c) ¿Qué representa cada una de las respuestas al inciso b?
   d) Grafique la función definida por partes. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

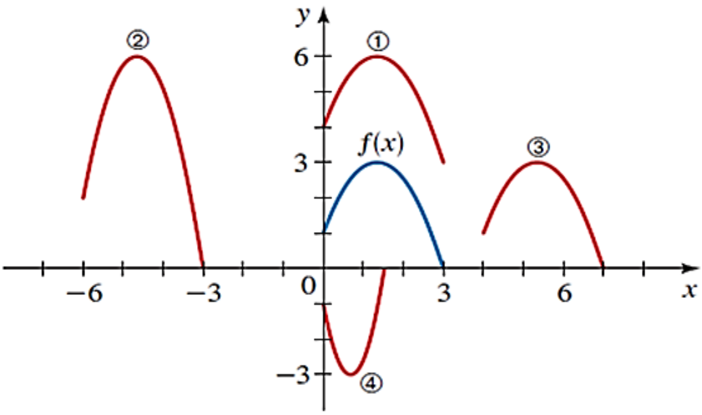
8. Una empresa paga impuestos por las utilidades generadas al año, si gana hasta 18 000 soles paga el 10 % de sus utilidades, si el monto es mayor paga 7% adicional sobre el monto de los 18 000 soles.
   a) Modela la función definida por trozos.
   b) Determine F (10 000), F (20 000) ¿Qué representan las respuestas?
   c) Grafique la función definida por partes. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

9. **Impuesto sobre la renta**: En cierto país, el impuesto sobre la renta T se evalúa de acuerdo con la siguiente función de ingreso x: El impuesto no se cobra si el ingreso es menor o igual a 10000 soles, si el ingreso es mayor a 10000 soles y menor a 20 000 soles se cobra el 8%, y se cobra15% sobre la cantidad de 20000 soles.
   a) Modela la función definida por trozos.
   b) Encuentre T(5000) , T(12 000) y T(25 000) ¿Qué representan sus respuestas?. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

10. **Salarios:** A un mecánico se le paga S/20 por hora por tiempo normal y tiempo extra se le paga tiempo y medio por hora. La cantidad de horas que debe trabajar por semana es de 40 horas. Determine la función S de salario sabiendo que “h” representa las horas que trabaja.
    a) La compañía aumento las horas de trabajo por semana a 48, escribe la nueva función de salario.
    b) ¿Qué representa S(20), S(48) , S(60) en la nueva función de Salario.
    c) Grafique la función definida por partes. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Transformación de funciones, álgebra y composición de funciones

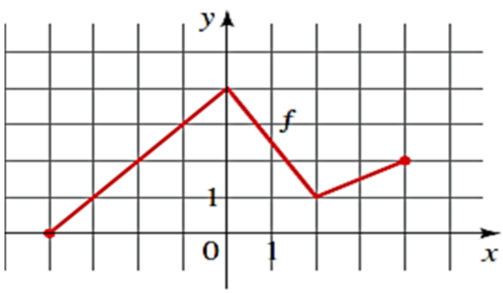
1. Se da la gráfica de $y = f(x)$.



correlacione cada ecuación con su gráfica.

a) $y = f_{(x-4)}$
b) $y = f_{(x)} + 3$
c) $y = 2f_{(x+6)}$
d) $y = -f_{(2x)}$ **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

2. Se da la gráfica de f.



Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = f_{(x-2)}$

b) $y = f_{(x)} - 2$

c) $y = 2f_{(x)}$

d) $y = -f_{(x)} + 3$

e) $y = f_{(-x)}$

f) $y = \frac{1}{2} f_{(x-1)}$ **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

3. Bosqueja la gráfica de las siguientes funciones, por transformaciones:

   a) $f_{(x)} = (x-2)^2$

   b) $f_{(x)} = -(x+1)^2$

   c) $f_{(x)} = -(x-1)^2 + 2$

   d) $f_{(x)} = 1 + \sqrt{x-3}$

   e) $f_{(x)} = -\frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 3$

   f) $f_{(x)} = |x-2| + 1$

   g) $f_{(x)} = -|x+2| + 3$

4. Grafica la siguiente función por transformaciones:

$$f(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{6-x} + 3$$

   y determina su dominio y Rango.

5. Determina el rango de $f \times g$ si

$$f_{(x)} = \frac{1}{2x+6} + 3 \quad ; \quad x \in \left\langle -\frac{1}{18}; +\infty \right\rangle$$

$$g_{(x)} = 3x + 9 \quad ; \quad x \in \left\langle -2; \frac{1}{6} \right]$$

6. Grafica la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$$

7. Grafica la siguiente función:

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

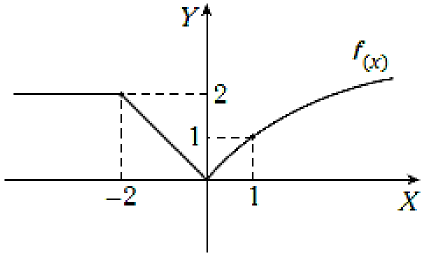
8. Determina el rango de $f \circ g$ si:

$$f_{(x)} = 2x + 3 \;\; ; \;\; x \in [-9; -2\rangle$$
$$g_{(x)} = 1 - x \;\; ; \;\; x \in [2; 7]$$

9. Determina el rango de $f \circ g$ si:

$$f_{(x)} = x^2 - 6x \;\; ; \;\; x \in \langle -7; 7\rangle$$
$$g_{(x)} = 2x + 3 \;\; ; \;\; x \in [-3; 3]$$

10. Si se tiene que $g_{(x)} = 1 - |x|$ y la gráfica de f es la siguiente



esboce la gráfica de $f \circ g$

Semana 3: Sesión 2

Funciones de uno a uno y sus inversas, polinomiales y racionales

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: ..... minutos
Docente: .... Unidad: 1
Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

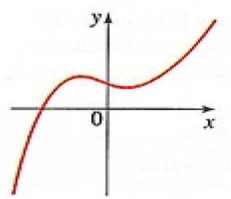
I. Propósito

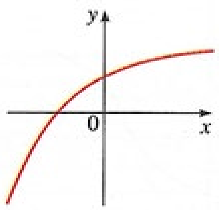
Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas de funciones polinomiales, sus gráficas, los ceros de los polinomios, las funciones racionales. identificando su importancia.

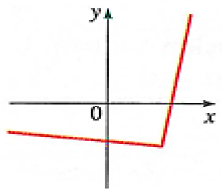
II. Descripción de la actividad por realizar

Funciones uno a uno y sus inversas

1. De acuerdo a las gráficas:

a) 

b) 

c) 

¿Cuál de ellas representa función inyectiva?

2. Determina si la función es inyectiva:

a) $f_{(x)} = -2x + 4$

b) $g_{(x)} = -\sqrt{2-x} + 3$

c) $h_{(x)} = x^2 - 2x$

d) $y = x^2 - 6x + 2 \quad ; \quad 3 < x < 5$

e) $y = |x-2| + x$

3. Dadas las funciones:

$$f = \{ (2;1), (3;6), (5;10), (7;14), (m;1) \}$$

$$f^{-1} = \left\{ (4;a), (10;b), (6;m-7), \left(\frac{p}{2}; c \right), (14;d) \right\}$$

Determina el valor de: a + b + c + d + m + p.

4. Determina si f y g son inversas, en cada caso:

a) $f_{(x)} = 2x - 1 \quad ; \quad g_{(x)} = \dfrac{x+1}{2}$

b) $f_{(x)} = \sqrt[3]{x-2} + 3 \quad ; \quad g_{(x)} = (x-3)^3 + 2$

c) $f_{(x)} = \sqrt{2+5x} \quad ; \quad g_{(x)} = \dfrac{x^2 - 2}{5}$

5. Determina la función inversa de f y su dominio, si:

$$f_{(x)} = x^2 - 4x + 1 \ ; \ x \leq 1$$

6. **Costo de una pizza:** Marcello's Pizza fijó como precio base de la pizza grande \$7 más \$2 por cada ingrediente. Por tanto, si usted ordena una

pizza grande con x ingredientes, el precio lo dará la función $f_{(x)} = 7 + 2x$ Determina la función f^{-1} ¿Qué representa el valor de $f^{-1}{}_{(15)}$? **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

7. **Cuota por servicio**: Por sus servicios, un investigador privado requiere una cuota de retención de $300 más $50 por hora. Sea x el número de horas que el investigador pasa trabajando en un caso.

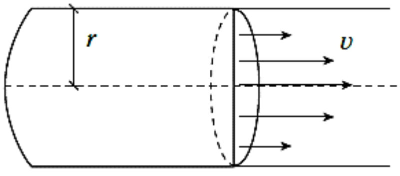
   a) Determina una función f^{-1} que modela la cuota del investigador como una función de x.
   b) Determina f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?
   c) Determina $f^{-1}{}_{(1220)}$. ¿Qué representa su respuesta? **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

8. **Ley de Torricelli**: Un recipiente contiene 100 galones de agua, que salen de una fuga en el fondo, lo que causa que el recipiente se vacíe en 40 minutos. La ley de Torricelli proporciona el volumen de agua que permanece en el recipiente después de t minutos como:

$$V_{(t)} = 100\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

   a) Determine ¿Cuántos galones hay en el recipiente?
   b) Encuentre V^{-1}. ¿Qué representa V^{-1}?
   c) Determine $V^{-1}{}_{(15)}$. ¿Qué representa su respuesta?
   d) ¿Cuánto tiempo quedará vacío el recipiente? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

9. **Flujo de sangre:** Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). Para una arteria con radio $0,5\,cm$, v está dada como una función de r por:



$$v_{(r)} = 18500\left(0,25 - r^2\right)$$

a) Determina v^{-1} . ¿Qué representa v^{-1} ?
b) Determine $v^{-1}{}_{(30)}$. ¿Qué representa su respuesta?
c) Determine $v_{(0,1)}$ ¿Qué representa?
d) Determine ¿Cuál es la distancia cuando no hay movimiento de la sangre? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

10. **Impuesto sobre la renta:** En cierto país, el impuesto por ingresos menores o iguales que 20000 euros es 10%. Para ingresos de más de 20000 euros, el impuesto es de 2000 euros más 20% de la cantidad sobre 20000 euros.

a) Determina una función f que proporciona el Impuesto sobre la renta por un ingreso x .
b) Determina f como una función definida por partes.
c) Determina f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1} ?
d) ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de 10000 euros? **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Funciones polinomiales, ceros de la función

1. Con respecto a la función $f_{(x)} = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, determine el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Los ceros de la función polinomial son $x = -3;\ x = -2;\ x = 0$.
b) El cero $x = 2$ tiene multiplicidad par.
c) La intersección con el eje Y es en el punto $(0; -12)$.
d) El comportamiento final de la curva cuando $x \to +\infty$ es $y \to +\infty$

2. Determina el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, teniendo en cuenta las características de la función polinomial:

$$P_{(x)} = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

a) Los ceros del polinomio son: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$
b) Tiene 4 ceros del polinomio y 4 intersecciones en el eje "x"
c) Presenta 2 extremos locales.
d) La suma de sus intersecciones en el Eje "x" es -4
e) Su gráfica presenta un punto máximo y dos puntos mínimos.

3. Dada la siguiente función polinomial:

$$P_{(x)} = \frac{1}{8}\left(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24\right)^2$$

Determine el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) El coeficiente principal del polinomio $P_{(x)}$ es $\frac{1}{8}$.

b) Al factorizar el polinomio $P_{(x)}$ los ceros reales son 2 y $-\frac{3}{2}$.

c) La grafica del polinomio $P_{(x)}$ intercepta con el eje "Y" en -24.

d) El grado del polinomio $P_{(x)}$ es 4.

4. Grafica las siguientes funciones polinomiales:

a) $P_{(x)} = x(x-3)(x+2)$

b) $P_{(x)} = (x-3)(x+2)(3x-2)$

c) $P_{(x)} = (x-1)^2(x-3)$

d) $P_{(x)} = \frac{1}{12}(x+2)^2(x-3)^2(x-1)^3$

e) $P_{(x)} = x^3(x+2)(x-3)^2$

5. Determina sus ceros de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $P_{(x)} = x^4 - 3x^2 - 4$

b) $P_{(x)} = 6x^3 + 3x + 1$

c) $P_{(x)} = x^6 - 2x^3 + 1$

6. Determina sus ceros y grafica cada uno de los siguientes polinomios:

a) $P_{(x)} = x^4 - x^2 - 6x$

b) $P_{(x)} = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

c) $P_{(x)} = -2x^3 - x^2 + x$

7. Grafique el polinomio y determine cuántos máximos y mínimos locales tiene.

a) $P_{(x)} = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $P_{(x)} = 6x^3 + 3x + 1$

c) $P_{(x)} = x^8 - 3x^4 + x$

8. Dada la función polinomial:

$$P_{(x)} = 6x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 5x + 6$$

Realice su gráfica correspondiente y marque la alternativa correcta:

a) $P_{(x)}$ es negativo en el intervalo $\left\langle \frac{2}{3};1 \right\rangle$.

b) $P_{(x)}$ es positivo en el intervalo $\left\langle -\frac{3}{2};-1 \right\rangle$.

c) Se cumple que $y \to -\infty$ cuando $x \to +\infty$.

d) $P_{(x)}$ es negativo para $x < -\frac{3}{2}$.

9. **Investigación de mercado:** Un analista de mercado que trabaja para un fabricante de aparatos pequeños encuentra que si la empresa produce y vende "x" licuadoras anualmente, la ganancia total (en dólares) es:

$$P_{(x)} = -x^3 + 25x^2 + 300x - 4500$$

¿Cuántas licuadoras debe producir la empresa para terminar sin pérdidas, ni ganancias?. Dar como respuesta la mayor cantidad posible. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

10. **Cambio de población:** Se observa que la población de conejos en una isla pequeña está dada por la función:

$$P_{(t)} = 120t - 0,4xt^4 + 1000$$

Donde t es el tiempo (en meses) desde que comenzaron las observaciones en la isla.

a) ¿Cuándo se obtiene la máxima población, y cuál es esa población máxima?

b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Funciones racionales

1. Determina la ecuación de la asíntota horizontal y vertical de la función racional y bosqueja su gráfica.

$$g_{(x)}=\frac{2x+3}{3x-2}$$

2. Dada la siguiente función:

$$f_{(x)}=\frac{\frac{1}{2}x^2+x-1}{x^2-2}$$

a) Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados.
b) Determina las asíntotas horizontal y vertical.
c) Bosqueja su gráfica.

3. De la siguiente función racional:

$$f_{(x)}=\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-8}$$

a) Encuentre las intersecciones con los ejes coordenados.
b) Encuentre las asíntotas.
c) Bosqueje la gráfica de la función.

4. Determina la ecuación de la asíntota horizontal y vertical de las funciones racionales y bosqueja su gráfica.

a) $f_{(x)}=\dfrac{x^2}{x^2-x-6}$

b) $f_{(x)}=\dfrac{4x-8}{(x-4)(x+1)}$

5. Determina la ecuación de la asíntota horizontal y vertical de las funciones racionales y bosqueja su gráfica.

a) $f_{(x)}=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}$

b) $f_{(x)} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

6. Determina la asíntota oblicua, verticales y trace una gráfica de las siguientes funciones.

a) $f_{(x)} = \dfrac{x^2}{x - 2}$

b) $f_{(x)} = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x - 3}$

c) $f_{(x)} = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{2x - 1}$

d) $f_{(x)} = \dfrac{x^2 + 4x}{1 - 2x}$

e) $f_{(x)} = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$

7. De la siguiente función racional:

$$f_{(x)} = \frac{2x^2 - 5x + 3}{4 - 2x}$$

a) Determina los puntos de intersección con el eje de las coordenadas.
b) Determina las ecuaciones de las asíntotas: horizontal, vertical y oblicua.
c) Bosqueja su gráfica.

8. Dada la función:

$$f_{(x)} = \frac{\left(2x^2 + x + 1\right)(x + 4)}{(x + 4)(x - 1)}$$

a) Determina los puntos de intersección con el eje de las coordenadas.
b) Determina las ecuaciones de las asíntotas: horizontal, vertical y oblicua.
c) Grafica la función.

9. **Crecimiento poblacional:** Suponga que la población de conejos de la granja del señor Jenkins sigue la fórmula:

$$p_{(t)} = \frac{300t}{t+1}$$

Donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el comienzo del año.

a) Trace una gráfica de la población de conejos.
b) ¿Qué sucede finalmente con la población de conejos?
Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)

10. Concentración del fármaco: Se monitorea la concentración de fármacos en el torrente sanguíneo de un paciente al que le fueron administrados fármacos en el instante $t \geq 0$ (en horas desde la administración del fármaco), la concentración (en mg/L) se determina por:

$$C_{(t)} = \frac{5t}{t^2+1}$$

a) ¿Cuál es la concentración más alta de fármaco que se alcanza en el torrente sanguíneo del paciente?
b) ¿Qué sucede con la concentración del fármaco después de un periodo largo?
c) ¿Cuánto le toma a la concentración disminuir debajo de 0,3 mg/L?
Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)

Semana 4: Sesión 2

Asíntotas de las funciones racionales

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 1
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante determina las asíntotas de las funciones racionales en la resolución de problemas.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. De la siguiente función racional:

$$r(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x + 1}$$

   a) Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados.
   b) Determina las asíntotas.
   c) Bosqueja la gráfica de la función.

2. Determina la ecuación de la asíntota horizontal y vertical de la función racional y bosqueja su gráfica.

$$r(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2}$$

3. Determina los puntos de intersección, asíntotas y bosqueja su gráfica de la función racional.

$$r(x)=\frac{2x^2+10x-12}{x^2+x-6}$$

4. Dada la función racional determine:

$$r(x)=\frac{x^2+3x}{x^2-x-6}$$

a) Las Asíntotas verticales.
b) La Asíntota horizontal.
c) Su gráfica y detallar el procedimiento completo.

5. De la siguiente función:

$$r(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+5}$$

a) Determina los puntos de intersección con el eje de las coordenadas.
b) Determina las ecuaciones de las Asíntotas.
c) Bosqueja su gráfica.

6. Dada la siguiente función:

$$r(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$$

a) Determina las intersecciones con el eje de las coordenadas.
b) Determina las asíntotas.
c) Bosqueja la gráfica de la función.

7. Determinar las intersecciones y las asíntotas en la siguiente función racional y grafique (Realice todo el procedimiento)

$$r(x)=\frac{2x^3-3x^2-2x}{x^2-1}$$

8. La temperatura T (en grados Celsius) de una solución en el tiempo t (en minutos) está dada por:

$$T(t)=\frac{4t^2+14t+13}{t+1}$$

a) Encuentre la ecuación de la asíntota oblicua y la ecuación de la asíntota vertical de la temperatura T.
b) Halle la temperatura inicial.

c) Grafique la temperatura T en función del tiempo t .
d) Analice el comportamiento de la temperatura cerca de la asíntota vertical. **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

9. Dada la función racional determine:

$$r(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$$

a) Intersecciones con los ejes X e Y.
b) Ecuaciones de las Asíntotas.
c) Bosqueje su gráfica. **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

10. Concentración de fármacos Se administra un fármaco a un paciente y se monitorea la concentración c del fármaco en el torrente sanguíneo. En el instante $t \geq 0$ (en horas desde la administración del fármaco), la concentración (en mg/L) se determina por:

$$C_{(t)} = \frac{40t}{3 + t^2}$$

Determine:
a) Las asíntotas de gráfica
b) Los intercepto en los ejes "t" e "C(t)"
c) Trace la gráfica de concentración del fármaco.
d) ¿Qué sucede eventualmente a la concentración del fármaco en el torrente sanguíneo? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Segunda

Unidad

Funciones trascendentes

Semana 5: Sesión 2

Ecuaciones y funciones exponenciales y logarítmicas

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante identifica la importancia de las leyes de exponentes y logarítmicas dentro de una ecuación, las funciones exponenciales, logarítmicas y sus aplicaciones en las ecuaciones en la resolución de problemas.

II. Descripción de la actividad por realizar

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1. Las siguientes igualdades, exprese en forma logarítmica.

   a) $5^3 = 125$
   b) $10^{-4} = 0,0001$
   c) $8^{-2} = \frac{1}{64}$
   d) $7^0 = 1$
   e) $e^x = 2$

f) $e^3 = y$

2. Las siguientes igualdades, exprese en forma exponencial.

a) $\log_5 25 = 2$

b) $\log_6 1 = 0$

c) $\log_8 2 = \dfrac{1}{3}$

d) $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$

e) $\ln 5 = x$

f) $\ln y = 5$

3. Efectúa:

a) $k = \log_3 84 + \log_5 1 + \log_4 \dfrac{1}{64}$

b) $T = \ln e^4 + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) + e^{\ln 3}$

c) $E = 3^{\log_3 7} + 16^{\log_4 3} + 81^{\log_3 2} + 2^{\log_8 27}$

d) $T = \log_{\sqrt{5}} 25 + \log_{\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\dfrac{4}{9}\right) + \log_{125} 5$

e) $A = \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \log_2\left(\dfrac{4}{5}\right) - \log_2\left(\dfrac{1}{30}\right)$

f) $S = \dfrac{1}{1+\log_2 5} + \dfrac{1}{1+\log_5 2}$

4. Determina el valor de la solución en cada una de las ecuaciones:

a) $\log x = 3\log 6 - 2\log 3$

b) $\log 25 + \log(3x-2) = 2$

c) $\log_3 x^{\log_3 x} = 4$

d) $\log_{49}\left(8 + \log_3(x-3)\right) = \dfrac{1}{2}$

e) $\log_2 x^{\log_2 x} - \log_2 x^7 = 18$

f) $\log_5 20 - \log_5 (x-3) = \log_5 (x-4)$

5. Determine la solución de cada una de las ecuaciones exponenciales, hasta con cuatro decimales (utilice una calculadora).

a) $e^{1-4x} = 2$

b) $4 + 3^{5x} = 8$

c) $5^{-\frac{x}{100}} = 2$

d) $e^{2x+1} = 200$

e) $5^x = 4^{x+1}$

f) $\dfrac{50}{1+e^{-x}} = 4$

6. **Paracaidismo.** La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar se expresa como: $v_{(x)} = 80\left(1-e^{-0,2t}\right)$. ¿Después de cuántos segundos la velocidad es 70 pies/s? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

7. **Población de peces.** Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población de peces se modela mediante la función:

$$P_{(t)} = \frac{10}{1+4e^{-0,8t}}$$

Donde: P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que se aprovisionó el lago.

a) Encuentre la población de peces después de tres años.

b) ¿Después de cuántos años la población de peces llega a 5000? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

8. Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (por ejemplo, una isla) con la relación especie - área.

$$\log S = \log C + K \log A$$

donde C y K son constantes positivas que dependen del tipo de especie y hábitat. Si K=3 para unas determinadas especies y se duplica el área, ¿qué sucede con el número de especies (S)? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

9. **Presión atmosférica.** La presión atmosférica P (en kilopascales, kPa) a la altura h (en kilómetros, km) está gobernada por la fórmula:

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

Donde $k = 7\ y\ P_0 = 100\ kPa$ son constantes.

a) Despeje P de la ecuación.
b) Use el inciso a) para calcular la presión P a una altitud de 4 km. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

10. **Enfriamiento de una máquina.** Suponga que conduce un automóvil en un frío día de invierno (20°F en el exterior) y la máquina se sobrecalienta (a cerca de 220°F). Cuando se estaciona, la máquina comienza a enfriarse. La temperatura T de la máquina t minutos después de que se estaciona satisface la ecuación:

$$\ln\left(\frac{T-20}{200}\right) = 0{,}11t$$

a) Despeje T de la ecuación.
b) Use el inciso a) para determinar la temperatura del motor después de 20 min ($t = 20$). **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f_{(x)} = \sqrt{2^{x-2} - 3}$

b) $f_{(x)} = \sqrt{3^{4-x} - \frac{1}{27}}$

c) $f_{(x)} = \dfrac{\sqrt{3^{3x-2} - 81}}{2^x - 16}$

$f_{(x)} = \dfrac{\sqrt{4^{3-x} - \frac{1}{16}}}{2^{-x} - \frac{1}{64}}$

2. Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f_{(x)} = \log_2(x-3) + \ln(6-x)$

b) $f_{(x)} = \log_7(2x-1) + \ln(9-3x)$

c) $f_{(x)} = \log_{(x-1)}(12-4x)$

d) $f_{(x)} = \log(2x-3) + \dfrac{1}{\log(5-x)}$

3. Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f_{(x)}=\sqrt{3-\log_2(x-3)}$

b) $f_{(x)}=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)+2}$

c) $f_{(x)}=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(1-|x|\right)}$

d) $f_{(x)}=\log\left(\sqrt{x+1}-2\right)$

4. Determina el rango de las siguientes funciones.

a) $f_{(x)}=2^{3-x}+1 \quad ; \quad x\in\langle -1;3]$

b) $f_{(x)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}-3 \quad ; \quad x\in[-2;2]$

c) $f_{(x)}=2^{x^2-1}+1 \quad ; \quad x\in\langle -1;2]$

d) $f_{(x)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x+1}+3 \quad ; \quad x\in\langle -1;2\rangle$

5. Determina el rango de las siguientes funciones.

a) $f_{(x)}=\log_2(2x-1)+1 \quad ; \quad x\in[1;3]$

b) $f_{(x)}=\log_{\frac{1}{3}}(2-x)-3 \quad ; \quad x\in\langle -1;2\rangle$

c) $f_{(x)}=\left|\log_3|x-1|\right|-1$

d) $f_{(x)}=\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

6. Grafica cada una de las siguientes funciones y determina su dominio y rango.

a) $f_{(x)}=2^{x+2}$

b) $f_{(x)}=3^{1-x}+2$

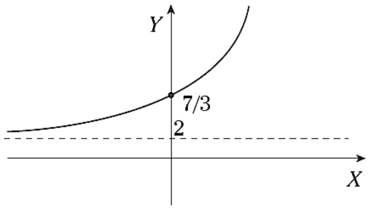
c) $f_{(x)}=3^{|x-2|}+1$

d) $f_{(x)}=e^{2-|x|}+1$

7. Grafica cada una de las siguientes funciones y determina su dominio y rango.

   a) $f_{(x)} = \log_2 (x-3)+1$
   b) $f_{(x)} = \log_{\frac{1}{3}} (x-2)+3$
   c) $f_{(x)} = \log_3 |x-1|$
   d) $f_{(x)} = \log_{\frac{2}{3}} \left(2-|x|\right)$

8. La gráfica de $f_{(x)} = a2^x + b$ es la siguiente:



   Determina el valor de: a^b

9. Determina el cardinal del conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} = \ln|x| - 1$$

10. Determina la función inversa de:

$$f_{(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad x > 0$$

Modelado de funciones exponenciales y logarítmicas

1. **Población de peces:** El número de cierta especie de peces se modela mediante la función

$$n(t) = 12e^{0,012t}$$

   Donde t se mide en años y n(t) se mide en millones.

   a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de la población de peces? Exprese su respuesta como porcentaje.
   b) ¿Cuál será la población de peces después de cinco años?
   c) ¿Después de cuántos años la cantidad de peces llega a 30 millones?

d) Trace una gráfica de la función de población de peces n(t). **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

2. **Transparencia de un lago.** Los científicos ambientales miden la intensidad de la luz a varias profundidades en un lago para determinar la transparencia del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población de macrófitas. En cierto lago la intensidad de la luz a una profundidad x está dada por:

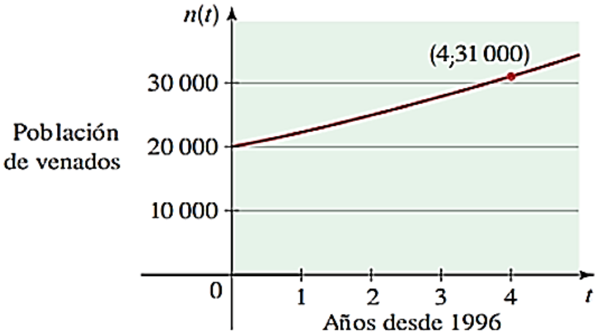
$$I_{(x)} = 10e^{0,008x}$$

a) Determine la intensidad I a una profundidad de 30 pies.
b) ¿A qué profundidad la intensidad de la luz ha disminuido a $I = 5$? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

3. **Población de una ciudad:** La población para cierta ciudad fue 112 000 en 1998, y la tasa de crecimiento relativa observada es 4% por año.

a) Encuentre una función que modele la población después de t años.
b) Encuentre la población proyectada en el año 2004.
c) ¿En qué año la población llega a 200 000? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

4. **Población de venados:** En la gráfica se muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 1996 y 2000. Suponga que la población crece de forma exponencial



a) ¿Cuál es la población de venados en 1996?
b) Encuentre una función que modele la población de venados t años después de 1996.
c) ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2004?
d) ¿En qué año la población de venados llega a 100 000? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

5. Una empresa estima que el volumen de ventas puede modelarse mediante la ecuación:

$$S_{(x)} = b2^{kx} \quad ; \quad 0 \le x \le 6$$

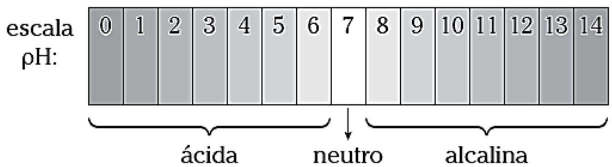
donde x es el número de semanas después de promover cierta venta y b es una constante real positiva. El volumen de ventas al final de la primera y la cuarta semana fue de \$ 32160 y \$ 4020, respectivamente. Calcula el volumen de ventas en la segunda semana. **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

6. **Cultivo de bacterias:** La cuenta en un cultivo de bacterias fue 400 después de dos horas y 25 600 después de seis horas.
   a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de la población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.
   b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
   c) Encuentre una función que modele el número de bacterias n(t) después de t horas.
   d) Calcule el número de bacterias después de 4.5 horas.
   e) ¿Cuándo el número de bacterias será 50 000? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

7. Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno hasta que Soren Peter Lauritz, en 1990, propuso una medida más cómoda. Él definió

$$pH = -\log[H^+]$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Se maneja la siguiente escala:



Si un agua tratada tiene un pH de 4, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno? **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

8. **Cesio radiactivo:** La vida media del cesio 137 son 30 años. Suponga que se tiene una muestra de 10 g.
   a) Encuentre una función que modele la masa restante después de t años.
   b) ¿Qué cantidad de la muestra queda después de 80 años?
   c) ¿Después de cuánto tiempo sólo quedarán 18 mg de la muestra? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

9. **Torio radiactivo:** La masa m(t) restante después de t días de una muestra de 40 g de torio 234 está dada por:

$$m(t) = 40e^{-0,0277t}$$

a) ¿Después de 60 días cuál es la cantidad de muestra restante?
b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que sólo queden 10 g de la muestra?
c) Calcule la vida media del torio 234. **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

10. El número de conejos de una granja después de t meses se modela mediante la función

$$P(t) = \frac{35000}{1 + 69e^{-0,41t}}$$

a) ¿Cuál fue el número inicial de conejos?
b) ¿Cuántos conejos habrá en 15 meses
c) ¿Cuándo el número de conejos será 1000?
d) La granja tendrá un proceso de mejora cuando se llegue a 3500 conejos. ¿Cuándo se tendrá este proceso? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Semana 7: Sesión 2

Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante identifica la importancia de las funciones trigonométricas, círculo trigonométrico y funciones trigonométricos inversas en la resolución de problemas.

II. Descripción de la actividad por realizar

Funciones trigonométricas y círculo unitario

1. Determina el máximo valor de k, si existe la siguiente igualdad.

$$sen\theta = \frac{3k-1}{5}$$

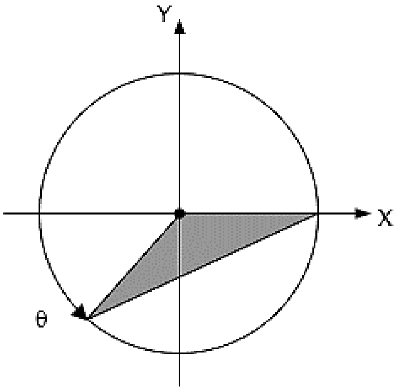
2. Si $\theta \in \square$, calcula la extensión de k, si existe la siguiente igualdad.

$$sen\theta = \frac{2k-9}{5}$$

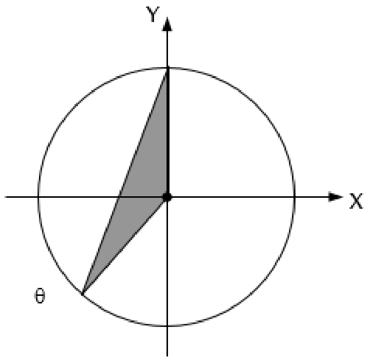
3. Si $\theta \in$ III, calcula la extensión de E y su máximo valor, si:

$$E = \frac{4sen\theta - 3}{7}$$

4. Si la circunferencia es trigonométrica, calcula el área del triángulo sombreado.



5. Calcula el área del triángulo sombreado, si la circunferencia es trigonométrica:



6. Si el dominio de la función $y = senx$ es [0; π/3] hallar su rango.

7. Si el rango de la función $y = senx$ es [1/2; 1]

8. Determine la amplitud, periodo, desplazamiento de fase y trace la gráfica de la función. (Incluya un solo periodo).

$a)\ \ f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$b)\ \ f(x)=\cos 2\pi x$

$c)\ \ f(x)=3sen2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$d)\ \ f(x)=3\cos(x+\pi)$

$e)\ \ y=-sen\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

9. Grafique las siguientes funciones trigonométricas, determinando amplitud, periodo y desplazamiento de fase. (Incluir un solo periodo)

a) $f(x)=sen(x)$

b) $f(x)=-\ senx$

c) $f(x)=2-3sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

e) $f(x)=1-2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

10. Grafique las siguientes funciones trigonométricas, determinando amplitud, periodo y desplazamiento de fase. (Incluir un solo periodo)

a) $f(x)=3sen\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x)=-2sen\left(\frac{4x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x)=2-3sen\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x)=2\cos\left(\frac{4x}{5}-\frac{\pi}{6}\right)+1$

e) $f(x)=1-3\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$

Funciones trigonométricas inversas

1. Calcule el valor exacto cada expresión, si está definida.

a) $sen \left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

b) $sen \left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

c) $sen \left(\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

d) $\cos^{-1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

2. Determine su equivalente de cada expresión:

a) $h(x) = \mathrm{Sec}\left(Cot^{-1}\left(\frac{1-x}{x+2}\right)\right)$

b) $h(x) = Cot\left(ArcSen\left(\frac{1-2x}{x+2}\right)\right)$

3. Con el apoyo de una calculadora, determina el valor de:

a) $M = arcsen(0,45)$

b) $P = sen^{-1}(0,76)$

c) $M = \arccos(0,07)$

d) $P = \tan^{-1}(7)$

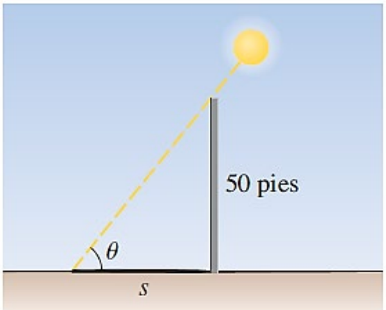
e) $M = \mathrm{arccot}(-2,7)$

f) $P = \sec^{-1}(7)$

g) $T = 3\,\mathrm{arccsc}(-5,7)$

h) $R = -4\csc^{-1}(12,5)$

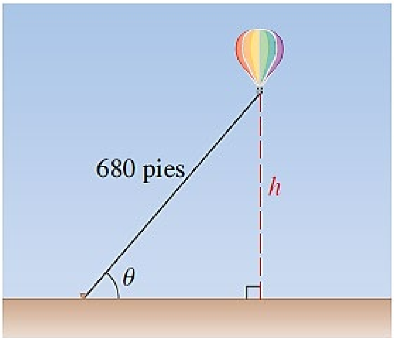
4. **Altura de un poste**: Un poste de 50 pies arroja una sombra como se ilustra en la figura.



a) Exprese el ángulo de elevación θ del Sol en función del largo s de la sombra.

b) Calcule el ángulo θ de la elevación del Sol cuando la sombra mide 20 pies de largo **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

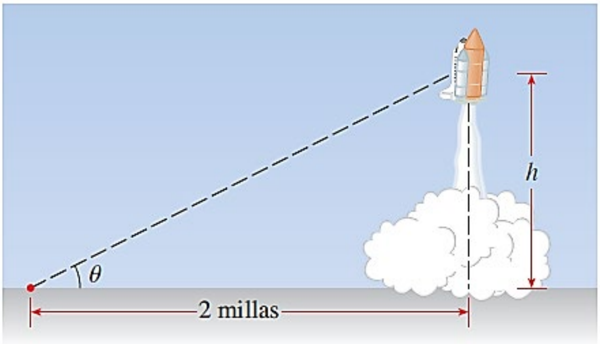
5. **Altura del globo:** Una cuerda de 680 pies mantiene anclado a un globo de aire caliente como se muestra en la figura.



a) Exprese el ángulo θ en función de la altura h del globo.

b) Calcule el ángulo θ si el globo está a 500 pies de altura. **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

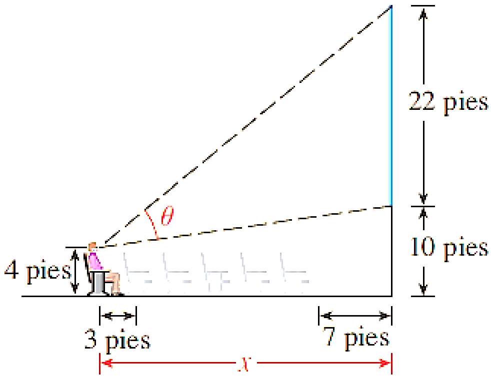
6. **ALTURA DEL TRANSBORDADOR ESPACIAL:** Un observador mira al transbordador a dos millas de la plataforma de lanzamiento.



a) Exprese la altura del transbordador espacial en función del ángulo de elevación θ.

b) Exprese el ángulo de elevación θ en función de la altura h del transbordador espacial. **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

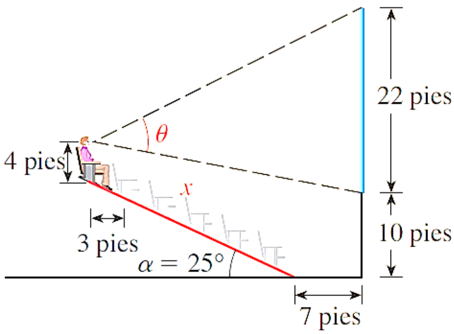
7. La pantalla de la sala mide 22 pies de alto y está colocada a 10 pies por arriba del piso, el cual es plano. La primera hilera de asientos está a 7 pies de la pantalla y las hileras están separadas 3 pies. Usted decide sentarse en la hilera donde tiene la máxima visión, es decir, donde es máximo el ángulo θ que subtiende la pantalla en sus ojos. Suponga que sus ojos están a 4 pies por arriba del piso, como en la figura, y se sienta a una distancia x de la pantalla.



a) Demuestra que $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{28}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{6}{x}\right)$.

b) Aplica la fórmula de sustracción para la tangente para demostrar que $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{22x}{x^2+168}\right)$. **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

8. Ahora suponga que, si empezamos en la primera hilera de asientos, el piso del área donde se encuentran éstos se eleva con un ángulo $a = 25°$ con respecto a la horizontal, y la distancia inclinada hasta donde usted se sienta es x, como se muestra en la figura.



a) Utilice la ley de los cosenos para demostrar que

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-484}{2ab}\right)$$

donde: $a^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (28 - xsen\alpha)^2$ y $b^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (xsen\alpha - 6)^2$

b) Utilice una calculadora o una computadora para graficar θ en función de x, y estimar el valor de x que hace máximo a θ. ¿en qué hilera se debe sentar? ¿Cuál es el ángulo de visión θ en es hilera? **Tomado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Semana 8: Sesión 2

Repaso

Sección: .... Fecha: .../.../..... Duración: ..... minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

III. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas repasando todos los temas que se han visto en las sesiones de clase hasta el momento para la resolución de la evaluación parcial.

IV. Descripción de la actividad por realizar

1. Con respecto a la función definida por partes:

$$f(x)=\begin{cases} -(x+1)^2 & ;si\ -3\le x<-1 \\ -|x-2| & ;si\ -1\le x<3 \\ -x+4 & ;si\ 3\le x\le 6 \end{cases}$$

   a) Bosqueja la gráfica.
   b) Determina el dominio y rango.
   c) Determine los intervalos creciente y decreciente de la gráfica.

2. Una cadena de hoteles cobra 100 soles por noche para las dos primeras noches y 80 soles por cada noche adicional y después de 10 noches el costo se reduce a 60 soles por noche. El costo total C (x) es una función del número de noches x que permanece un huésped. Determine C^{-1}

(1200); ¿Qué representa la respuesta? **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

3. Uno de los rubros de una empresa es la elaboración de casas prefabricadas. El gerente está preocupado por el alza del costo de la madera en donde:

$$C_{(x)} = 4x^2 - 280x + 17850$$

Es la función que representa el costo de la madera a utilizar (en dólares) al producir x casas prefabricadas.

a) ¿Cuál es la cantidad de casas prefabricadas que minimizan el costo en madera?
b) ¿Cuánto es el costo mínimo de la madera a utilizar? **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

4. De la siguiente función racional determine:

$$f_{(x)} = \frac{6x^2 - 13x + 7}{x + 1}$$

a) Los puntos de intersección con los ejes X e Y.
b) Las ecuaciones de las Asíntotas.
c) Bosqueja su gráfica

5. Resolver la ecuación logarítmica, compruebe su respuesta y determinar el conjunto solución.

$$\log x^{\log x} + \log x - 6 = 0$$

6. En el laboratorio de investigación de microbiología del Instituto Nacional de Salud del país, se cuenta con una población de bacterias, el microbiólogo encargado, menciona que el tamaño inicial de un cultivo de bacterias es 1900, después de dos horas la cuenta de bacterias es 8600, se desea determinar lo siguiente:
a) La cantidad de bacterias al cabo de 470 minutos.
b) ¿Cuándo la población llega a 3 millones? (Usar dos decimales y dar como respuestas el entero más próximo) **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

7. Un aeroplano vuela a una altura de 2985m directamente arriba de una carretera recta; dos automovilistas conducen en la carretera a un mismo lado del aeroplano, los ángulos de depresión respecto a los automóviles son de 69° y 45°. (Aproxime su respuesta a dos decimales)
a) Bosqueje el comportamiento del problema.

b) La distancia que separa a los automóviles.
c) La distancia mayor del auto al avión. **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

8. De la siguiente función, bosqueje su gráfica, determine la amplitud, periodo, desfase, traslación vertical, dominio y rango. **(Incluir un solo periodo)**

$$f(x) = 6 - \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

9. Dos botes salen del mismo puerto a la misma hora. Uno viaja a una velocidad de 39 millas/h en la dirección N 46° E y el otro viaja a una velocidad de 28 millas/h en una dirección S 57°E. **(Aproxime su respuesta a dos decimales)**

   a) Bosqueje el comportamiento del problema.
   b) ¿Qué tan apartados están los botes después de dos horas y media?
   c) Determine los ángulos internos de la gráfica del inciso "a". **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

10. La estación A estación de los guardacostas se encuentra a 200 millas al oeste de la estación B. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio la cual es recibida por ambas estaciones. La llamada a la estación A indica que la posición del barco es de 53° al este del norte; la llamada a la estación B indica que la posición del barco es 30° al oeste del norte.

    a) ¿A qué distancia del barco se encuentra de cada estación?
    b) Si un helicóptero que puede volar a 242 millas por hora desde la estación más cercana al barco. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a este? **Adaptado de Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (2012)**

Tercera **Unidad**

Matrices

Semana 9: Sesión 2

Matrices y Determinantes

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas identificando la importancia de las matrices y sus operaciones, haciendo uso de estas operaciones para los procesos de Gauss Jordán y el cálculo de determinante para sus aplicaciones en métodos algebraicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

Matrices: Operaciones (adición de matrices, multiplicación de un escalar por una matriz y multiplicación de matrices). Propiedades y Aplicaciones

1. Reconstruya las siguientes matrices:

 a) $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3} \;/\; a_{ij}=i+j$

 b) $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times 3} \;/\; b_{ij}=i\times j$

 c) $C=\left[c_{ij}\right]_{3\times 3} \;/\; c_{ij}=\begin{cases} i+j & ;\; si\;\; i\neq j \\ i.j & ;\; si\;\; i=j \end{cases}$

 d) $D=\left[d_{ij}\right]_{4\times 3} \;/\; d_{ij}=\begin{cases} 2^i-j & ;\; si\;\; i\geq j \\ 2^j-i & ;\; si\;\; i<j \end{cases}$

e) $E=\left[e_{ij}\right]_{3\times 4}$ / $e_{ij}=\begin{cases}2i-j & ; \ si \ \ i>j\\ i+j & ; \ si \ \ i=j\\ 2j-i & ; \ si \ \ i<j\end{cases}$

2. Determina la traza de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 9 & 8 & 7\\ -4 & -5 & -6\end{pmatrix}$

c) $C=\left[c_{ij}\right]_{3\times 3}$ / $c_{ij}=\begin{cases}i+j & ; \ si \ \ i\neq j\\ i.j & ; \ si \ \ i=j\end{cases}$

d) $D=\left[d_{ij}\right]_{3\times 3}$ / $d_{ij}=\begin{cases}2^{i} & ; \ si \ \ i\geq j\\ 2^{j} & ; \ si \ \ i<j\end{cases}$

e) $E=\left[e_{ij}\right]_{4\times 4}$ / $e_{ij}=\begin{cases}2i-j & ; \ si \ \ i>j\\ i+j & ; \ si \ \ i=j\\ 2j-i & ; \ si \ \ i<j\end{cases}$

3. Determina la matriz transpuesta de cada una de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}-3 & -12 & 9\\ 2 & 7 & 2\\ 5 & -9 & -8\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}-5 & -e & 3\\ \pi & 4 & -7\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}-11 & -3 & -2 & 6\\ 2 & -2 & 4 & -4\\ 8 & 6 & 5 & 3\end{pmatrix}$

d) $D=\left[d_{ij}\right]_{2\times 3}$ / $d_{ij}=\begin{cases}2^{i} & ; \ si \ \ i\geq j\\ 2^{j} & ; \ si \ \ i<j\end{cases}$

e) $E=\left[e_{ij}\right]_{2\times 4}$ / $e_{ij}=\begin{cases}2i-j & ; \ si \ \ i>j\\ i+j & ; \ si \ \ i=j\\ 2j-i & ; \ si \ \ i<j\end{cases}$

4. Si la matriz B es la transpuesta de A y, además:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ x & y+1 & z-2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 2 \\ b-4 & 3 \\ c+1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula: $x+y+z+a+b+c$

5. Si la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -y & 3 \\ 2 & -1 & z \\ x & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

es simétrica, calcula $x+y+z$

6. Si la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a-2 & -y & 3 \\ 2 & b-3 & -z \\ x & 5 & c-4 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica, calcula el valor de: $x+y+z+a+b+c$

7. Calcula: $(x-y)(z-w)$; Si $\begin{bmatrix} 2x-z & w-y \\ z-x & w+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

8. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si A = B, calcula: 3A + 2C

9. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si A = B, calcula: A + 3C

10. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina $Traz(B)$, si: $A+B=I$.

11. Dadas las matrices:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3} \,/\, a_{ij}=(-1)^{i}+(-1)^{j}$$
$$B=\left(b_{ij}\right)_{3\times 3} \,/\, b_{ij}=i+j$$

Calcula: $c_{11}+c_{22}+c_{33} \,/\, C=A+B$

12. Determina la traza de la matriz A, si

$$\begin{cases} (A+I)^2=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ (A-I)^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

13. Si:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{B}=\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \quad \text{C}=\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Determina la traza de la matriz X, donde $2(X-2B)=3\left[A+2(X-2B)\right]+C$

14. Si:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix} \;;\; \text{B}=\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ 8 & 4 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \text{C}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 12 & 5 & -6 \\ -1 & 14 & 10 \end{bmatrix}$$

Resolver la siguiente ecuación: $2(X-2C)=3X-C-2(A+2B-X)$

15. Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \quad \text{B}=\begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$$

Resolver la siguiente ecuación: $\begin{cases} 2X+3Y=A \\ 5X-2Y=B \end{cases}$

16. Efectúa las siguientes multiplicaciones de matrices

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}=$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=$

17. Determina $AB-BA$ si:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 02 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Dadas las matrices.

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{C}=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si $E=ABC$, determina el valor de: $\mathrm{S}=\mathrm{e}_{11}+e_{23}+e_{32}$

19. Si:

$$\begin{bmatrix} 2 & b & 1 & d \\ a & -2 & c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$$

Determina el valor de la suma: $\mathrm{S}=a+b+c+d$

20. Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix};B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcula:

a) $(A+B)^2$

b) A^2+B^2

21. Dada las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \text{B} = \begin{bmatrix} -9 & 5 & -8 \\ 3 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Determina: $A^2 - B^2$, $A^2 + B^2$, $A^2 + 2AB + B^2$, $(A+B)^2$

22. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina la suma de elementos de A^{40}.

23. Sea la matriz: $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, además el polinomio $F(x) = x^{34} - 2x^9 + I$. Calcula la matriz F(B).

24. Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcula la matriz M, si: $M = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + ... + A^n; n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$

25. Sean las matrices:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

además $A = (\cos\theta)I + (sen\theta)J \quad y \quad B = A.A^T$.

Calcula la matriz $I + B + B^2 + B^3 + ... + B^{10}$

Aplicación de las matrices

1. **MANUFACTURA.** Una compañía tiene tres fábricas, cada una de las cuales fabrica guitarras acústicas y eléctricas. El número de unidades de guitarras producidas en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 70 & 50 & 25 \\ 35 & 100 & 70 \end{pmatrix}$$

Determina los niveles de producción si ésta se aumenta en 20%. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

2. **MANUFACTURA.** Una compañía tiene cuatro fábricas, cada una de las cuales produce vehículos de uso general y camionetas pequeñas. El número de unidades del vehículo i producido en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 90 & 70 & 30 \\ 40 & 20 & 60 & 60 \end{pmatrix}$$

Determina los niveles de producción si ésta se aumenta en 10%. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

3. **AGRICULTURA**. Un productor produce dos cosechas, manzanas y duraznos. Cada una de ellas es enviada a tres mercados para su venta. Estos mercados son el del Agricultor, el de la Fruta y el de la Granja. El número de búshels de manzanas enviadas a los tres mercados son 125, 100 y 75, respectivamente. El número de búshels de duraznos enviados a los tres mercados son100, 175 y 125, respectivamente. La utilidad por búshel de manzanas es $3.50 y por búshel de duraznos $6.00.
   a) Escriba una matriz A que represente el número de búshels de cada cosecha i que son enviados a cada mercado j. Diga lo que representa cada elemento a_{ij} de la matriz.
   b) Escriba una matriz B que represente la utilidad por búshel de cada fruta. Diga lo que representa cada elemento b_{ij} de la matriz.
   c) Encuentra el producto BA y diga lo que representa cada elemento de la matriz. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

4. **INGRESOS.** Un fabricante de productos electrónicos produce tres modelos de televisores de pantalla de cristal líquido, que son enviados a dos almacenes. El número de unidades del modelo i que son enviadas al almacén j están representados por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 5000 & 4000 \\ 6000 & 10000 \\ 8000 & 5000 \end{pmatrix}$$

Los precios por unidad están representados por la matriz

$$B = (\$699.95 \quad \$899.95 \quad \$1099.95)$$

Calcula BA e interprete el resultado. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

5. **INVENTARIO.** Una compañía vende cinco modelos de computadoras por medio de tres mercados de venta al menudeo. Los inventarios están representados por:

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}}^{Modelo} \\
S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Los precios al mayoreo y al menudeo están representados por:

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\begin{array}{cc} Mayoreo & Menudeo \end{array}}^{\Pr ecio} \\
T = \begin{pmatrix} \$840 & \$1100 \\ \$1200 & \$1350 \\ \$1450 & \$1650 \\ \$2650 & \$3000 \\ \$3050 & \$3200 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Calcula ST e interprete el resultado. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

6. **NECESIDADES DE MANO DE OBRA/SUELDO.** Una compañía que fabrica botes tiene las siguientes necesidades de mano de obra y sueldos.
Mano de obra por bote

$$
\begin{array}{cc}
\overbrace{\begin{array}{ccc} Corte & Ensamble & Empaque \end{array}}^{Departamento} & \\
S = \begin{pmatrix} 1.0\,h & 0.5\,h & 0.2\,h \\ 1.6\,h & 1.0\,h & 0.2\,h \\ 2.5\,h & 2.0\,h & 1.4\,h \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{c} Pequeño \\ Mediano \\ Grande \end{array}\right\} Tamaño\ de\ bote
\end{array}
$$

Sueldos por hora

$$
\begin{array}{cc}
\overbrace{\begin{array}{cc} A & B \end{array}}^{Planta} & \\
T = \begin{pmatrix} \$15 & \$13 \\ \$12 & \$11 \\ \$11 & \$10 \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{c} Corte \\ Ensamble \\ Empaque \end{array}\right\} Departamento
\end{array}
$$

Calcula ST e interprete el resultado. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

7. **UTILIDADES.** En un mercado de lácteos, el número de galones de leche descremada, leche al 2% y leche entera vendido en el fin de semana está representado por A.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \textit{Leche descremada} & \textit{Leche al 2\%} & \textit{Leche entera} & \\
A = & \left(\begin{array}{ccc} 40 & 64 & 52 \\ 60 & 82 & 76 \\ 76 & 96 & 84 \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} \textit{Viernes} \\ \textit{Sábado} \\ \textit{Domingo} \end{array}
\end{array}
$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres tipos de leche vendidos por el mercado de lácteos están representados por B.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \textit{Precio de Venta} & \textit{Utilidad} & \\
B = & \left(\begin{array}{cc} \$3.45 & \$1.20 \\ \$3.65 & \$1.30 \\ \$3.85 & \$1.45 \end{array}\right) & & \begin{array}{c} \textit{Leche descremada} \\ \textit{Leche al 2\%} \\ \textit{Leche entera} \end{array}
\end{array}
$$

a) Calcula AB e interprete el resultado.
b) Determina la utilidad total del mercado de lácteos por ventas de leche para el fin de semana. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

8. **UTILIDADES.** En una tienda de conveniencia (abierta todo el día), el número de galones de gasolina de 87 octanos, 89 octanos y 93 octanos vendido el fin de semana está representado por A.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\begin{array}{ccc} 87 & 89 & 93 \end{array}}^{\textit{Octanos}} & \\
A = & \left(\begin{array}{ccc} 580 & 840 & 320 \\ 560 & 420 & 160 \\ 860 & 1020 & 540 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \textit{Viernes} \\ \textit{Sábado} \\ \textit{Domingo} \end{array}
\end{array}
$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres grados de gasolina vendidos por la tienda de conveniencia están representados por B.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \textit{Precio de Venta} & \textit{Utilidad} & \\
B = & \left(\begin{array}{cc} \$2.00 & \$0.08 \\ \$2.10 & \$0.09 \\ \$2.20 & \$0.10 \end{array}\right) & & \left.\begin{array}{c} 87 \\ 89 \\ 93 \end{array}\right\} \textit{Octanos}
\end{array}
$$

a) Calcula AB e interprete el resultado.
b) Encuentra la utilidad de la tienda de conveniencia por ventas de gasolina para el fin de semana. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

9. **EJERCICIO.** El número de calorías quemadas por personas de diferentes pesos corporales, que realizan diferentes tipos de ejercicios aeróbicos durante un periodo de 20 minutos, se muestra en la matriz A.

$$\begin{array}{rcl} & \overbrace{\begin{array}{cc}\text{Persona} & \text{Persona} \\ \text{de 120 lb} & \text{de 150 lb}\end{array}}^{\text{Calorías quemadas}} & \\ A = & \begin{bmatrix} 109 & 136 \\ 127 & 159 \\ 64 & 79 \end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{Ciclismo} \\ \text{Trotar} \\ \text{Caminar}\end{array} \end{array}$$

Una persona de 120 lb y otra de 150 lb corrieron en bicicleta durante 40 minutos, trotaron 10 minutos y caminaron 60 minutos.

a) Organiza en una matriz B el tiempo que pasaron ejercitándose.

b) Calcula BA e interprete el resultado. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

10. **Ventas de comida rápida.** Una pequeña cadena de restaurantes de comida rápida, con sucursales en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim vende sólo hamburguesas, perros calientes y malteadas. En cierto día, las ventas se distribuyeron de acuerdo con la siguiente matriz.

$$\begin{array}{rcl} & \overbrace{\begin{array}{ccc}\text{Santa Monica} & \text{Long Beach} & \text{Anaheim}\end{array}}^{\text{Número de piezas vendidas}} & \\ \begin{array}{r}\text{Hamburguesas} \\ \text{Perros calientes} \\ \text{Malteadas}\end{array} & \begin{bmatrix} 4000 & 1000 & 3500 \\ 400 & 300 & 200 \\ 700 & 500 & 9000 \end{bmatrix} & = A \end{array}$$

El precio de cada pieza está dado en la matriz siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hamburguesa} & \text{Perro caliente} & \text{Malteada} \\ [\$0.90 & \$0.80 & \$1.10] = B \end{array}$$

a) Calcula el producto BA.

b) Interpreta las entradas de la matriz producto BA. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

11. **Utilidades de fabricación de autos.** Un fabricante de autos especiales tiene plantas en Auburn, Biloxi y Chattanooga. Se producen tres modelos, con producción diaria dada en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r|ccc|l}
 & \multicolumn{3}{c}{\textbf{Autos producidos cada día}} & \\
 & \textbf{Modelo K} & \textbf{Modelo R} & \textbf{Modelo W} & \\
\textbf{Auburn} & 12 & 10 & 0 & \\
\textbf{Biloxi} & 4 & 4 & 20 & = A \\
\textbf{Chattanooga} & 8 & 9 & 12 &
\end{array}$$

Debido a aumentos de salarios, las utilidades en febrero son más bajas que las de enero. La utilidad por auto está tabulada por modelo en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r|cc|l}
 & \textbf{Enero} & \textbf{Febrero} & \\
\textbf{Modelo K} & \$1000 & \$500 & \\
\textbf{Modelo R} & \$2000 & \$1200 & = B \\
\textbf{Modelo W} & \$1500 & \$1000 &
\end{array}$$

a) Calcula AB.
b) Suponiendo que se vendieran todos los autos producidos, ¿cuál fue la utilidad diaria en enero en la planta Biloxi?
c) ¿Cuál fue la utilidad diaria total (de las tres plantas) en febrero? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

12. **Productos de tomate enlatados.** Jaeger Foods produce salsa de tomate y pasta de tomate, enlatadas en latas pequeñas, medianas, grandes y gigantes. La matriz A da el tamaño (en onzas) de cada recipiente.

$$\begin{array}{r|cccc|l}
 & \textbf{Pequeñas} & \textbf{Medianas} & \textbf{Grandes} & \textbf{Gigantes} & \\
\textbf{Onzas} & 6 & 10 & 14 & 28 & = A
\end{array}$$

La matriz B tabula la producción de un día de salsa de tomate y pasta de tomate.

$$\begin{array}{r|cc|l}
 & \textbf{Latas de salsa} & \textbf{Latas de pasta} & \\
\textbf{Pequeñas} & 2000 & 2500 & \\
\textbf{Medianas} & 3000 & 1500 & = B \\
\textbf{Grandes} & 2500 & 1000 & \\
\textbf{Gigantes} & 1000 & 500 &
\end{array}$$

a) Calcula el producto de AB.
b) Interpreta las entradas de la matriz producto AB. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

13. **SERVICIOS DE SALUD.** Los planes de servicios de salud ofrecidos este año por una planta local de manufactura son como sigue. Para personas, el plan completo cuesta \$694.32, el plan estándar de la HMO (Health Management Organization) cuesta \$451.80 y el plan HMO Plus cuesta \$489.48. Para familias, el plan completo cuesta \$1725.36, el plan estándar de la HMO cuesta \$1187.76 y el plan HMO Plus cuesta \$1248.12. La planta espera que el costo de los planes cambie el año siguiente como sigue.

Para personas, el costo para el plan completo, estándar HMO y HMO Plus serán de $683.91, $463.10 y $499.27, respectivamente. Para familias, el costo para el plan completo, HMO estándar y HMO Plus serán de $1699.48, $1217.45 y $1273.08, respectivamente.

a) Organiza la información usando dos matrices A y B, donde A represente el costo del plan de atención de salud para este año y B represente el costo del plan de atención de salud para el año siguiente. Exprese lo que representa cada entrada de cada matriz.
b) Calcula e interprete el resultado.
c) Los empleados reciben cheques de pago mensualmente, de los cuales están deducidos los costos del plan de atención de salud. Use las matrices del inciso (a) para escribir matrices que muestren cuánto se deducirá del cheque de empleados este año y el siguiente.
d) Suponga en cambio que los costos de los planes de atención de salud aumentan 4% el año siguiente. Escriba una matriz que muestre los nuevos pagos mensuales. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

14. Un importador de globos los importa de dos colores. Naranja y rojo y los envía en paquetes de 2, 5 y 10 unidades que vende a los siguientes precios:

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Naranja	4	8	12
Rojo	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Naranja	Rojo
2 unidades	700.000	50.000
5 unidades	600.000	40.000
10 unidades	500.000	500.000

Se pide:
a) Resuma la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz que recoja las ventas en un año y B será una matriz que recoja los precios.
b) Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz AB y dar su significado.
c) Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz BA y dar su significado. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

15. Una compañía tiene 4 fábricas, cada una emplea administradores, supervisores y trabajadores calificados en la forma siguiente:

	Fabrica 1	Fabrica 2	Fabrica 3	Fabrica 4
Administrador	1	2	1	1

Supervisor	4	6	3	4
Trabajadores	80	96	67	75

Si los administradores ganan $350 a la semana, los supervisores $275 y los trabajadores $200, cual es la nómina de cada fábrica. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

Determinantes de orden 2 y 3: Método de Sarrus, Método de Expansión por Cofactores y Método de Gauss - Jordan.

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$|A| =$

$|B| =$

$|A + C| =$

$|2B| =$

2. Calcula:

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & a+4 \\ a-4 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Determina el valor de "k" para que: $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$

4. Calcula:

$$\sum_{n=1}^{20} \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & n \\ 0 & \frac{1}{n+1} \end{vmatrix}$$

5. Calcula el determinante de las matrices por la regla de Sarrus:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Calcula la determinante por el método de los cofactores:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 8 & -13 & 19 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 10 & 12 & 10 \end{vmatrix} = \qquad \det(D) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\det(E) = \begin{vmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \det(F) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

7. Calcula la determinante por el método de los cofactores:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 8 & -2 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 12 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$\det(E)=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&0&8\\1&0&9&12\\0&4&9&0\end{vmatrix}=$$

$$\det(F)=\begin{vmatrix}0&1&-33&1\\0&4&11&-8\\1&0&0&-3\\9&1&9&0\end{vmatrix}=$$

8. Calcula la determinante de las siguientes matrices por el método de Gauss Jordan.

$$A=\begin{bmatrix}6&3&-7\\0&0&0\\4&-6&3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&2\\3&1&0\\-3&0&3\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-1&8&-3\\0&3&-6\\0&0&3\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}2&4&6\\0&3&1\\0&0&-5\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}2&6&6&2\\2&7&3&6\\1&5&0&1\\3&7&0&7\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}5&3&0&6\\4&6&4&12\\0&2&-3&4\\0&1&-2&2\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}-4&1&1&1&1\\1&-4&1&1&1\\1&1&-4&1&1\\1&1&1&-4&1\\1&1&1&1&-4\end{bmatrix}\qquad H=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&0&0&1&2&3\\1&1&1&2&4&5\\0&0&0&3&2&1\\0&0&0&1&1&1\\2&1&0&4&3&2\end{bmatrix}$$

Semana 10: Sesión 2

Propiedades de determinantes y matrices inversas

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas identificando la importancia de las propiedades básicas de determinantes en matrices para sus aplicaciones en el cálculo de la matriz inversa.

II. Descripción de la actividad por realizar

Propiedades básicas de los determinantes

1. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

2. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

3. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

5. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

6. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

7. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

8. Calcula:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix}$$

9. Si: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5$. Calcula la determinante de: $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

10. Si: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5$. Calcula la determinante de: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

11. Demuestra:

$$\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

12. Demuestra:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriz inversa: Cálculo de la matriz inversa por el Método de la Matriz Adjunta.

1. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ determina:

A^{-1}, si existe.
B^{-1}, si existe.
$A^{-1}.B$
$(A+B)^{-1}$

2. Determina la inversa de cada matriz, si existe:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $D=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

$E=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad$ $F=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

$M=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad$ $N=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

3. Determina la inversa de cada matriz, si existe:

$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ $D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$E=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad$ $F=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$G=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -1 & 9 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $H=\begin{bmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$T=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ $\quad$ $R=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -2 & -5 & 8 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa: Cálculo de la matriz inversa por el Método Gauss – Jordan

1. $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9. $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

10. $F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

11. $D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

13. $F=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Semana 11: Sesión 2

Sistema de ecuaciones lineales

Sección:	Fecha: .../.../.....	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas identificando la importancia de los sistemas de ecuaciones y su solución por lo métodos de Gauss – Jordan, Cramer, y matriz inversa.

II. Descripción de la actividad por realizar

Solución de Sistema de Ecuaciones Lineales por el Método de Gauss - Jordan, Método de Cramer y Método de Matriz Inversa.

1. En cada caso resuelva el SEL 2x2 por el método que sea apropiado:

$$\begin{cases} y = 6x \\ x = \dfrac{2y-5}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+3}{y} = 5 \\ 2(x-3y)+x = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - y = 7 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 7 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y-1}{2} = 1 \\ 7x - 4(x+y) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 3 \\ \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{x-2y}{4} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x+5-y) + 3x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} + \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5} + \dfrac{y-1}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

2. Resuelva los siguientes SEL 3x3 y 4x4 por Gauss – Jordan.

$$\begin{cases} 4x - y + 5z = -6 \\ 3x + 3y - 4z = 30 \\ 6x + 2y - 3z = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 3y - 4z = -35 \\ 3x - 2y + 5z = 38 \\ x + y - 6z = -27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 12 \\ 9x - y + 4z = 37 \\ 10x + 5y + 3z = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 4y - 10z = 6 \\ 6x - 8y + 5z = -1 \\ 12x + 12y - 15z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ z + x - y = 3 \\ z - x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - z + 5x = 3 \\ 10x - y + z = 10 \\ 2y + 15x - z = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 3 \\ 10x - 8y - 9z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3z = 2 \\ 2z - y = -5 \\ x + 2y - 4z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x - y - 3z = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 5z + 3t = 0 \\ 3x + 4y + 2z + t = 0 \\ 2x + 4z + t = 0 \\ -y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ 5x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - z + 2u + 3v = -1 \\ 4x + z + u - v = -2 \\ x + 6y + 3z + u + v = 3 \\ -2x - 2z + u + 4v = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 4u = 1 \\ 3x - y + 2u = -1 \\ -x - z - 2u = -1 \\ 2x + 2y + 4z + 8u = 6 \\ 5x + 5z + 10u = 5 \end{cases}$$

3. Resuelva los siguientes SEL por el método de Gauss – Jordan.

a) $\begin{cases} -4x - 7y = 47 \\ -x + 6y = -27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x & & -3z & = -2 \\ 3x & +y & -2z & = 5 \\ 2x & +2y & +z & = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x & +y & -z & = -14 \\ 2x & -y & +z & = 21 \\ 3x & +2y & +z & = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x & +2y & -z & = 2 \\ x & -3y & +z & = -28 \\ -x & +y & & = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x & \mp 2y & +z & = 3 \\ 2x & +5y & -z & = 4 \\ 3x & -2y & -z & = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x & +2y & +4z & = 1 \\ 5x & -y & -3z & = -7 \\ 4x & +3y & +z & = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x & -2y & +2z & = 0 \\ -x & +y & -z & = 1 \\ x & +y & & = -4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x & -2y & +2z & = 0 \\ 5x & +3y & +4z & = 2 \\ 2x & +y & & = -4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = b \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - y - w = 3 \\ 2y + z + 4w = -2 \\ 2x - w = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y + z = \dfrac{34}{15} \\ x - y - z = -\dfrac{16}{15} \\ 5x + 3y + z = 8 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2x - y + z - 4w = -32 \\ 7x + 2y + 9z - w = 14 \\ 3x - y + z + w = 11 \\ x + y - 4z - 2w = -4 \end{cases}$

Aplicaciones de Sistema de Ecuaciones Lineales

SEL de orden 2x2

1. La otra tarde vi en un parking 39 vehículos, entre coches y motos, a los que les conté un total de 126 ruedas. ¿Cuántos vehículos de cada clase había en el parking? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

2. En el aula de 3º A hay doble número de alumnos que en el aula de 3º C. Además, se sabe que, si se pasan 8 alumnos de 3º A a 3º C, ambas aulas tendrán el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada una de estas aulas? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

3. Un fabricante de bombillas gana 0,60 € por cada bombilla que sale de fábrica, pero pierde 0,80 € por cada una que sale defectuosa. Un determinado día en el que fabricó 2.100 bombillas obtuvo un beneficio de 966 €. ¿Cuántas bombillas buenas fabricó ese día? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

4. En un test de elección múltiple, se puntúa 4 por cada respuesta correcta y se resta un punto por una equivocada. Un estudiante responde a 17 cuestiones y obtiene 43 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

5. Una tienda de discos vende 84 discos a dos precios distintos: unos 18 € y otros a 14,4 €, obteniendo de la venta 1.242 €, ¿Cuántos discos vendió de cada clase? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

6. Hace 5 años, la edad de Sonia era triple que la de Roberto, y dentro de 10 años será doble. ¿Qué edad tiene cada uno? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

7. Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m más larga que ancha y que el perímetro mide 210 metros. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

8. Un orfebre recibe el encargo de confeccionar un trofeo, en oro y en plata, para un campeonato deportivo. Una vez realizado, resulta de un peso de 1.300 gramos, habiendo costado 2,840 €. ¿Qué cantidad ha utilizado de cada metal precioso, si el oro sale 8 €/gramo y la plata por 1,7 €/gramo? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

9. La edad de un padre es el triple de la de su hija más 2 años y hace 5 años la cuadriplicaba. ¿Qué edades tienen padre e hija? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

10. Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

11. El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2 cm al doble de la longitud del lado desigual. ¿Cuánto miden los lados del triángulo? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

12. Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos las dos iguales cantidades". ¿Cuánto dinero tenía cada uno? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

13. Encuentra dos números cuya suma sea igual a 30, y el doble del primero, más el segundo sea igual al doble de este último. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

14. La edad de Carla es el doble que la edad de Macarena. Hace diez años la suma de las edades era igual a la edad que tiene hoy Carla. ¿Cuál es la edad de cada una en la actualidad? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

15. Si se divide un ángulo recto en dos ángulos agudos, de modo que uno sea el doble del otro más 3', ¿cuál es la medida de cada uno? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

16. Un padre reparte $10.000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2.000 más que al menor. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**
17. Encuentra dos números tales que si a cada uno le agregamos siete unidades, los resultados están en la razón 3 : 2, pero si les restamos cinco unidades, la razón es 5 : 2. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

18. El perímetro de un rectángulo es 30 cm. El doble de la base tiene 6 cm más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

19. Dos estantes contienen en total 40 libros. Al traspasar 5 libros de un estante a otro, resulta que uno queda con el triple del otro. ¿Cuántos libros había originalmente en cada estante? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

20. Para pagar una cuenta de $3.900, un extranjero entrega 9 libras esterlinas y 15 dólares, recibiendo $75 de vuelto. Otro extranjero paga su cuenta de $4.330, con 15 libras esterlinas y 9 dólares, recibiendo $25 de vuelto. ¿A qué cambio, en pesos, se han cotizado las libras esterlinas y los dólares? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

21. Encuentra las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

22. La suma de dos números es 45. Si al primero se le suma 5 y al segundo se le resta 5, se obtienen dos números tales que el primero es el doble que el segundo. ¿Cuáles son los números? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

23. El valor de una fracción es 1. Si se disminuye el numerador en 3 unidades y se aumenta el denominador en 5 unidades, el nuevo valor es igual a 3. ¿Cuál es la fracción? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

24. Una persona tiene \$8.000 en 200 monedas de \$10 y de \$50. ¿Cuántas monedas de \$10 y de \$50 tiene? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

25. Divide el número 19 en dos partes tales que 2/3 de la menor sea igual a 3/5 de la mayor. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

26. Encuentra una fracción que, si se disminuye su numerador en 4 unidades y se aumenta su denominador en 5, es equivalente a 1. Pero si se disminuye sólo el denominador en 7, será equivalente. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

27. La suma de dos números es 13, si el mayor se divide por el menor se obtiene por cociente 2 y por resto 1. Encuentra ambos números. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

28. La edad de un hijo es 1/4 de la edad de su padre. En 7 años más la edad del hijo será 4/9 la del padre. Encuentra las edades actuales de ambos. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

29. Si el numerador de una fracción se aumenta en 3 y su denominador se disminuye en 1, se obtiene 5/2, pero si solamente se aumenta su numerador en 2, ésta equivale a 4/3. Determina la fracción. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

30. Encuentra dos números enteros consecutivos, sabiendo que la cuarta parte y la quinta parte del primero y la suma de la tercera parte y la séptima parte del segundo son también números consecutivos. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

SEL de orden 3x3

1. En unos grandes almacenes un señor compra 2 trajes de chaqueta, 1 cazadora y 2 pantalones. Paga 530 euros. En la caja contigua, otra persona está pagando 840 euros por 3 trajes de chaqueta, 3 cazadoras y un pantalón. Al día siguiente hay una oferta en la que se hace un 10 % de descuento, y un chico ha pagado 225 euros por un traje de chaqueta y una cazadora. ¿Cuánto cuesta cada artículo? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

2. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos del estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.
   a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.
   b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

3. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

4. En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.
   a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?
   b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

5. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

6. Hallar un número de tres cifras sabiendo que suman 9; que, si del número dado se resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198; y que, además, la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

7. Una nación importa 21000 vehículos mensuales de las marcas X, Y, Z, al precio de 1,2; 1,5; y 2 millones de pesetas. Si el total de la importación asciende a 33200 millones, y de la marca X se importa el 40% de la suma de las otras dos marcas, ¿cuántos vehículos de cada marca entran en ese país?

8. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay? Ana quiere comprar material para el curso. En una papelería compra 3 bolígrafos, 2 cuadernos y 4 lápices, pagando un total de 290 pesetas; en otra papelería compra 4 cuadernos y 6 lápices y tiene que pagar 380 pesetas. Y en una tercera gastó 390 pesetas en comprar 5 bolígrafos y 3 cuadernos. Sabiendo que en todas las papelerías tienen los mismos precios, ¿cuánto vale cada lápiz, cada cuaderno y cada bolígrafo? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

9. Los 90 alumnos de 2º de bachiller de un instituto están divididos en tres grupos A, B y C. Calcular el número de alumnos de cada grupo sabiendo que si se pasan 7 alumnos del grupo B al grupo A ambos grupos tendrían el mismo número de alumnos; si se pasan 4 alumnos del grupo C al grupo A, en éste habría la mitad de alumnos que en el grupo C. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

10. Un almacén distribuye cierto producto que fabrican tres marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gr y su precio es de 100 pts; la marca B lo envasa en cajas de 500 gr a un precio de 180 pts y la marca C lo hace en cajas de 1 Kg a un precio de 330 pts. El almacén vende a un cliente 2,5 Kg de este producto por un importe de 890 pts. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, se pide calcular cuántos envases de cada tipo se han comprado. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

Semana 12: Sesión 2

Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas identificando la importancia de interpretación geométrica de sistema de ecuaciones.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Interpreta gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y=15 \\ 2x-y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-5y=20 \\ 2x-10y=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+3y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x-y=53 \\ 4x+5y=43 \end{cases}$$

2. Interpreta gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y=18 \\ 6x+4y=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-4y=10 \\ x-2y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-6y=9 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5y=10 \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$$

3. Interpreta gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+2y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y=12 \\ 6x+4y=36 \end{cases}$$

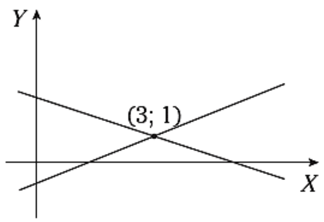
$$\begin{cases} 2x-4y=8 \\ x-2y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-6y=12 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5y=20 \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$$

4. La representación geométrica del sistema:

$$\begin{cases} x+ny=m+3 \\ x-(m-1)y=m-2 \end{cases}$$

es la siguiente

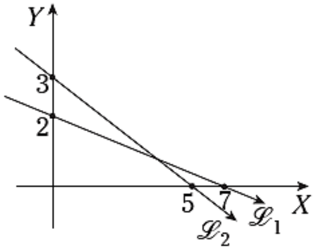


Determina el valor de: $m+n+mn$

5. El gráfico del sistema

$$\begin{cases} ax+by=2 & (L_1) \\ mx+ny=1 & (L_2) \end{cases}$$

es la siguiente

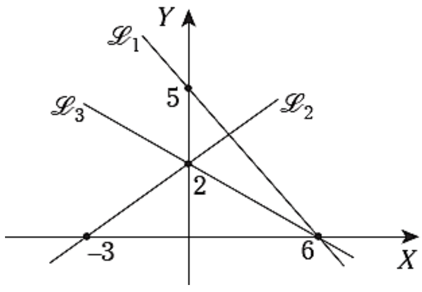


Si $(\alpha;\beta)$ es la solución, entonces determine $11(\alpha+\beta)$.

6. Del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 & (L_1) \\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1 & (L_2) \\ \dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{s}=1 & (L_3) \end{cases}$$

que presenta el siguiente gráfico:

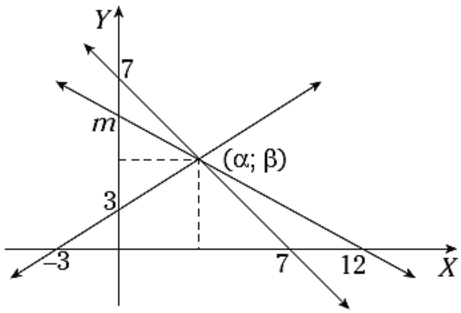


Calcula el valor de: $a+b+m+n+r+s$

7. Al representar al sistema:

$$\begin{cases} y-x=3 \\ x+y=7 \qquad ; \quad \{a;b;c\} \subset \mathbb{R} \\ ax+by=c \end{cases}$$

en el plano cartesiano

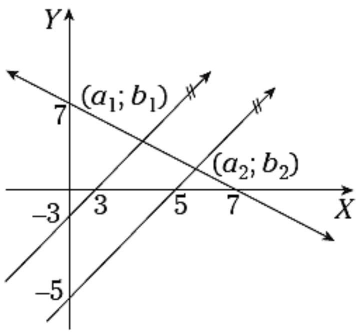


Calcula el valor de: $a+b+m+c+\beta-\alpha$

8. Si el sistema lineal de incógnitas x e y,

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \\ x+y=7 \end{cases}$$

está representado por:



Determina el valor de: $a_1 . a_2 + b_1 . b_2$

9. Determine la gráfica del siguiente sistema lineal.

$$\begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ 6x+3y-9z=3 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$$

10. Determine la gráfica del siguiente sistema lineal.

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$$

Cuarta **Unidad**

Límites de funciones reales

Semana 13: Sesión 2

Definición intuitiva de límites – Límites laterales

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ….. minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas identificando la importancia de la definición intuitiva del límite y los límites laterales para el cálculo del mismo por procesos algebraicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

Definición intuitiva de límites

1. Completa la tabla

x	$3,9$	$3,99$	$3,999$	$4,001$	$4,01$	$4,1$
$f_{(x)} = -x^2 + 2x + 2$						

utilizar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x \to 4} \left(-x^2 + 2x + 2 \right)$$

2. Completa la tabla

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$f_{(x)}=\frac{1}{x}$						

utilizar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

3. Completa la tabla

x	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$2,001$	$2,01$	$2,1$
$f_{(x)}$						

utilizar el resultado para estimar el límite: $\lim_{x\to 2} f_{(x)}$ donde $f_{(x)}=\begin{cases} x^2 & ;\ x<2 \\ -x+6 & ;\ x>2 \end{cases}$

4. Completa la tabla

x	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$2,001$	$2,01$	$2,1$
$f_{(x)}=\frac{x-2}{x^2-4}$						

utilizar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$$

5. Completa la tabla

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$f_{(x)}=\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}$						

utilizar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}$$

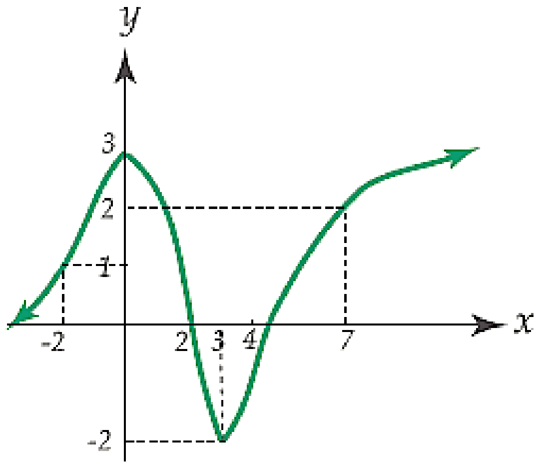
6. Completa la tabla

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$f_{(x)}=\frac{senx}{x}$						

utilizar el resultado para estimar el límite:

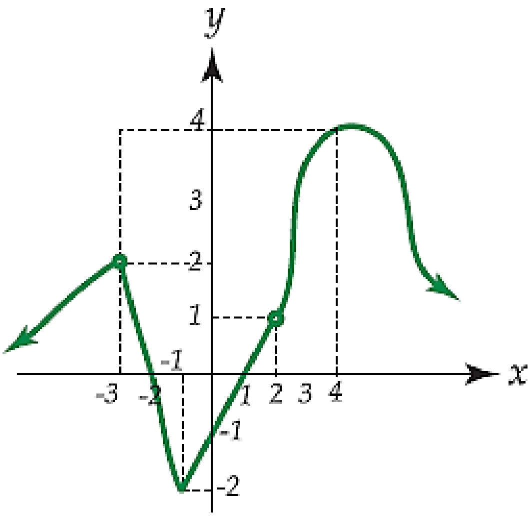
$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$$

7. Determinar los siguientes límites, utilizando para ello la representación gráfica de la función f que se da a continuación:



a) $\lim_{x \to 0} f_{(x)}$
b) $\lim_{x \to 2} f_{(x)}$
c) $\lim_{x \to 3} f_{(x)}$
d) $\lim_{x \to 4,5} f_{(x)}$
e) $\lim_{x \to -2} f_{(x)}$
f) $\lim_{x \to 7} f_{(x)}$

8. Determinar los siguientes límites, utilizando para ello la representación gráfica de la función f que se da a continuación:



a) $\lim_{x \to -3} f_{(x)}$
b) $\lim_{x \to 0} f_{(x)}$

c) $\lim_{x \to 2} f_{(x)}$

d) $\lim_{x \to -2} f_{(x)}$

e) $\lim_{x \to 4} f_{(x)}$

f) $\lim_{x \to -1} f_{(x)}$

9. Dado los límites:

$$\lim_{x \to 2} f_{(x)} = 4 \quad ; \quad \lim_{x \to 2} g_{(x)} = -2 \quad ; \quad \lim_{x \to 2} h_{(x)} = 0$$

Determina los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} \left(f_{(x)} + 5g_{(x)} \right)$

b) $\lim_{x \to 2} \left[f_{(x)} - 5h_{(x)} \right]^2$

c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f_{(x)}}{g_{(x)}}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{6g_{(x)} + h_{(x)}}{f_{(x)}}$

10. Dado los límites:

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = 4 \quad ; \quad \lim_{x \to a} g_{(x)} = 2$$

Determina los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to a} \left(5f_{(x)} + 6g_{(x)} \right)$

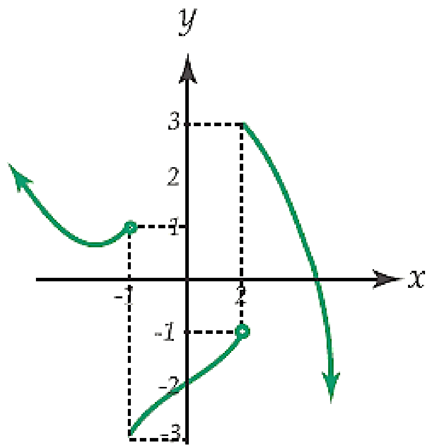
b) $\lim_{x \to 2} \left[f_{(x)} - 2g_{(x)} \right]^5$

c) $\lim_{x \to a} \dfrac{f_{(x)}}{f_{(x)} - 2g_{(x)}}$

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{\left[f_{(x)} \right]^2 - 4\left[g_{(x)} \right]^2}{f_{(x)} - 2g_{(x)}}$

Límites laterales

1. Determinar los siguientes límites, utilizando para ello la representación gráfica de la función f que se da a continuación:

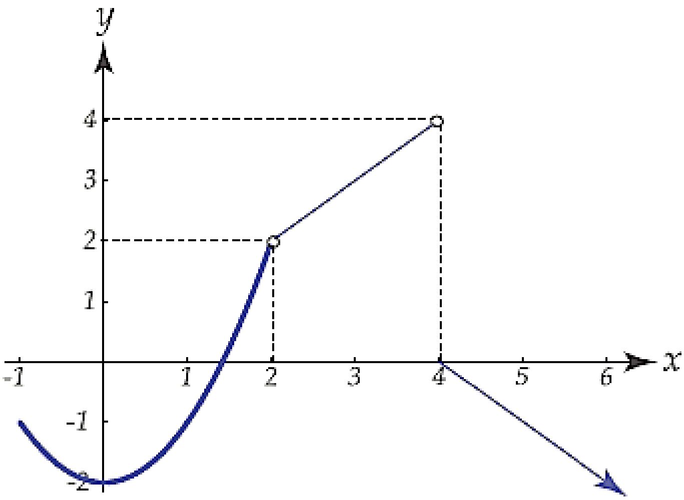


a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f_{(x)}$ b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f_{(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f_{(x)}$ d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f_{(x)}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} f_{(x)}$ f) $\lim\limits_{x \to 0^+} f_{(x)}$

2. Determinar los siguientes límites, utilizando para ello la representación gráfica de la función f que se da a continuación:



a) $\lim\limits_{x \to 2} f_{(x)}$ b) $\lim\limits_{x \to 4} f_{(x)}$

3. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} x+2 & ; \; si \quad x \geq 1 \\ -x^2 - 1 & ; \; si \quad x < 1 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f_{(x)}$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f_{(x)}$

4. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \; si \quad x < 2 \\ x & ; \; si \quad 2 < x < 4 \\ 4 - x & ; \; si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2^-} f_{(x)}$ b) $\lim_{x \to 2^+} f_{(x)}$

c) $\lim_{x \to 4^-} f_{(x)}$ d) $\lim_{x \to 4^+} f_{(x)}$

5. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & ;\ si \quad x \leq -2 \\ x+3 & ;\ si \quad -2 < x < 1 \\ -1 & ;\ si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ (x-4)^2 & ;\ si \quad x > 3 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -2^-} f_{(x)}$ b) $\lim_{x \to -2^+} f_{(x)}$

c) $\lim_{x \to 1^-} f_{(x)}$ d) $\lim_{x \to 1^+} f_{(x)}$

e) $\lim_{x \to 3^-} f_{(x)}$ f) $\lim_{x \to 3^+} f_{(x)}$

6. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2x+1 & ;\ si \quad x \geq 2 \\ x^2+1 & ;\ si \quad x < 2 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites: $\lim_{x \to 2} f_{(x)}$

7. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} |x|+1 & ;\ si \quad x < -1 \\ x^2+1 & ;\ si \quad -1 \leq x < 3 \\ 4x-2 & ;\ si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -1} f_{(x)}$ b) $\lim_{x \to 3} f_{(x)}$

8. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & ; \ si \quad x \le -2 \\ x+3 & ; \ si \quad -2 < x < 1 \\ -1 & ; \ si \quad 1 \le x \le 3 \\ (x-4)^2 & ; \ si \quad x > 3 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} f_{(x)}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} f_{(x)}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} f_{(x)}$

9. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 + a & ; \ si \quad x < 2 \\ bx + a & ; \ si \quad 2 \le x < 4 \\ |2x-1| & ; \ si \quad x \ge 4 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b si $\lim\limits_{x \to 2} f_{(x)}$ y $\lim\limits_{x \to 4} f_{(x)}$ existe.

10. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)} = \begin{cases} ax^2 + bx & ; \ si \quad x \le 1 \\ -bx + 2 & ; \ si \quad 1 < x \le 3 \\ \sqrt{2x+3} + a & ; \ si \quad x > 3 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b si $\lim\limits_{x \to 1} f_{(x)}$ y $\lim\limits_{x \to 3} f_{(x)}$ existe.

Semana 14: Sesión 2

Límites indeterminados

Sección:	Fecha: .../.../......	Duración: ..... minutos
Docente:		Unidad: 2
Nombres y apellidos:		

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas identificando la importancia de la interpretación geométrica de los límites de una función asociado al cálculo algebraico.

II. Descripción de la actividad por realizar

Límites que involucran factorización

1. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-2x}\right)$$

2. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{5x-x^2}\right)$$

3. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} \right)$$

4. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^3 + 27}{x + 3} \right)$$

5. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \right)$$

6. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2x^2 + 2x - 12}{3x^2 - 5x - 2} \right)$$

7. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right)$$

8. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^3 - 24x - 5}{x^4 - 5x^3 - x^2 + 7x - 10} \right)$$

9. Determine el valor de a, si se cumple que:

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^3 + (1-a)x^2 - ax}{x^2 - x - 2} \right) = -2$$

10. Determine el valor de a y b, si se cumple que:

$$\lim_{x \to 2b} \left(\frac{x^3 - x^2 + ax + 12}{x^2 - 4bx + 4b^2} \right) \in \mathbb{R}$$

Límites que involucran Racionalización

1. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \right)$$

2. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - x - 6} \right)$$

3. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{x+6} - x}{3 - x} \right)$$

4. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2x - 4}{\sqrt{x+2} - 2} \right)$$

5. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \right)$$

6. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \right)$$

7. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x^3 - 64}{x - \sqrt{2x+8}} \right)$$

8. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \right)$$

9. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 1}{\sqrt{2x+7} - 1} \right)$$

10. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \right)$$

Semana 16: Sesión 2

Repaso

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: ….. minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Lee atentamente los ejercicios y/o situaciones planteadas en la presente y resuelve en tu cuaderno de apuntes. Sé ordenado.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas identificando la importancia de repasar todos los temas que se han visto en las sesiones de clase hasta el momento para la resolución de la evaluación final.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Los números de calorías consumidas por individuos de distintos pesos corporales, realizando diferentes tipos de ejercicios aeróbicos, para un período de 20 minutos, se encuentran en la matriz A.

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{array}{cc}\begin{array}{c}Personas\\ que\ pesan\\ 54\,kg\end{array} & \begin{array}{c}Personas\\ que\ pesan\\ 68\,kg\end{array}\end{array}}^{Modelo} & \\ A = & \begin{bmatrix} 109 & 136 \\ 127 & 159 \\ 64 & 79 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} Clicismo \\ Trote \\ Ca\min ata \end{array} \end{array}$$

   a) Una persona que pesa 54 Kg y una persona que pesa 68 Kg practicaron ciclismo durante 40 minutos, trotaron durante 10 minutos y caminaron durante 60 minutos. Organice el tiempo empleado ejercitándose en una matriz B.
   b) Calcula BA e interprete el resultado. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

2. Dada las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Determina la Matriz X:

a) $3X + 5I - 2B = C - AD$

b) $-2A - 3(CD) = 2B - 4x + 2I$

c) $BC + 3(AI) = 2X - D^T$

3. Calcule el determinante por el método de cofactores y/o utilizando teoremas.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Determina la inversa (si existe). Por el método esquemático (Matriz Adjunta) y por Gauss.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

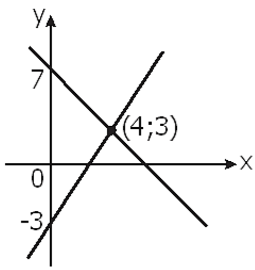
b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -5/6 & 1/3 & 11/6 \\ 0 & 2/3 & 2 \\ 1 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$

5. Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres formatos distintos A, B y C. Las cajas de tipo A tienen un peso de 250 gramos y un precio de 0.6 €, las de tipo B pesan 500 gramos y su precio es de 1.08 €, mientras que las C pesan 1 kilogramo y cuestan 1.98 €. A una farmacia se le ha suministrado un lote de 5 cajas, con un peso de 2.5 kilogramos, por un importe de 5.35 €. ¿Cuántas cajas de cada tipo ha comprado la farmacia? **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

6. Tres personas A, B y C, le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 75.73€. Como no todos disponen del mismo dinero, deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 0.12 € que paga B, C paga 0.18 €. Plantea un sistema que permita determinar cuánto paga cada persona y resuelve el problema. **Tomado de Álgebra lineal y sus aplicaciones (2012).**

7. Si el gráfico

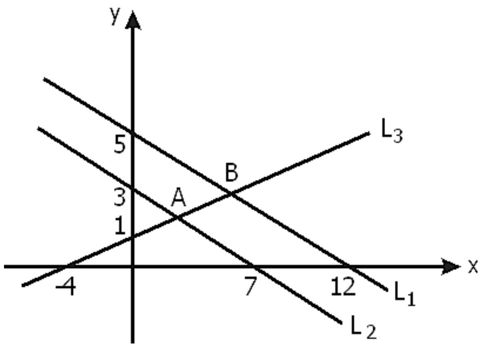


representa al sistema

$$\begin{cases} x + ay = 7 \\ 3x - 5y = b \end{cases}$$

Determina el valor de: $L = \dfrac{6a + b}{ab}$

8. En la figura se muestra la gráfica de tres rectas L_1, L_2 y L_3, donde A(m; n) y B(p; q)



Determina el valor de: $m+n+p+q$

9. Completa la tabla

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$2{,}001$	$2{,}01$	$2{,}1$
$f_{(x)}=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$						

utilizar el resultado para estimar el límite: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

10. Sea la función f definida por:

$$f_{(x)}=\begin{cases} x^2-6 & ;\ si\quad x<3 \\ x & ;\ si\quad 3\le x<5 \\ 10-x & ;\ si\quad x\ge 5 \end{cases}$$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f_{(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f_{(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 5^-} f_{(x)}$ d) $\lim\limits_{x\to 5^+} f_{(x)}$

11. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-3x^2-3x+9}{x^2-5x+6}\right)$$

12. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{2x+6}-4}\right)$$

13. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)$$

14. Determine el límite dado, o concluya que no existe:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x}{4-2x}+\frac{5}{x-2}\right)$$

Referencias

Lay, D. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (4.ª ed.). Pearson.

Larson, R., y Edwards, B. (2016). Cálculo. (10.ª ed.). Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. (6.ª ed.) Cengage Learning.

Swokowski y Cole (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (12.ª ed.). Cengage Learning.

Zill, D. y Dewar, J. (2012). *Precálculo con avances de cálculo*. (5.ª ed.). Mc Graw Hill.