Universidad Continental

Guía de Trabajo

Economía Matemática Básica

Joel Jovani Turco Quinto

Contenido

Presentación

La Guía de Trabajo de la asignatura Economía Matemática Básica tiene como propósito consolidar los conocimientos adquiridos en las clases presenciales y/o virtuales con apoyo de la bibliografía recomendada. Ayudará a centrarse en los tipos de problemas, ejercicios y aplicaciones que un estudiante de economía y finanzas debe al menos dominar, desde lo básico al avanzado.

Este documento sigue la estructura del sílabo de la asignatura, dividida en cuatro unidades. En la primera unidad, llamada álgebra lineal, se desarrollan los temas de vectores, matrices, sistema de ecuaciones lineales y temas avanzados. En la segunda unidad, cálculo de una variable y multivariable, se tocan todos los aspectos relacionados al cálculo y su aplicación a economía y finanzas. La tercera unidad, optimización, consta de los temas de optimización con y sin restricciones, además de la estática comparativa relacionada. Finalmente, la última unidad denominada programación lineal y no lineal, contiene dichos temas y de integrales básicas y avanzadas.

Al finalizar la asignatura, el estudiante será capaz de identificar las variables y las teorías económicas existentes a un nivel inicial. Se espera que use el álgebra lineal, cálculo, optimización estática, y la programación lineal y no lineal, para el análisis de modelos microeconómicos y macroeconómicos.
Para el uso correcto de la presente guía, el estudiante debe culminar primero con las clases y con las lecturas de la bibliografía recomendada, tanto la parte teórica como la práctica. Luego, el estudiante debe afianzar sus conocimientos adquiridos con la solución al conjunto de ejercicios, problemas y aplicaciones en el campo de la microeconomía y macroeconomía. Ciertamente encontrará algunos ejercicios retadores; sin embargo, con la orientación del profesor y las lecturas de seguro serán desarrolladas.

Joel Jovani Turco Quinto

Primera **Unidad**

Álgebra lineal

Semana 1: Sesión 2

Vectores y espacios euclidianos

Sección: .... Fecha: .../.../..... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica los vectores para el análisis de modelos microeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Sean dos vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$. Demuestre que $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son ortogonales ($\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$) si solo si $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = 0$.

2. Determine si los siguientes pares de vectores son ortogonales.
   a) $\boldsymbol{x} = (0,5)$, $\boldsymbol{y} = (-5,0)$
   b) $\boldsymbol{x} = (0,3,1)$, $\boldsymbol{y} = (1,0,0)$
   c) $\boldsymbol{x} = (-1,0,2,3)$, $\boldsymbol{y} = (0,-6,0,0)$
   d) $\boldsymbol{x} = (-1/2,3,1)$, $\boldsymbol{y} = (7,0,1)$

3. Sean dos vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ y sea θ el ángulo formado por ellos. Demuestre que el coseno del ángulo es el siguiente

$$cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}$$

   para todo $0 < \theta < \pi/2$.

4. Determine el ángulo formado por los siguientes pares de vectores

a) $\boldsymbol{x} = (1,5)$, $\boldsymbol{y} = (6,2)$

b) $\boldsymbol{x} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{y} = (4,1,1)$

c) $\boldsymbol{x} = (-1,8,1,0)$, $\boldsymbol{y} = (1,-1,-1,2)$

d) $\boldsymbol{x} = (2,-2,-1)$, $\boldsymbol{y} = (0,1,1)$

5. Dado cada grupo de vectores, use la definición de independencia lineal para determinar si son linealmente independientes

   a) $\boldsymbol{x} = (0,5)$, $\boldsymbol{y} = (-5,0)$

   b) $\boldsymbol{x} = (2,5)$, $\boldsymbol{y} = (4,10)$

   c) $\boldsymbol{x} = (4,2)$, $\boldsymbol{y} = (-2,8)$

   d) $\boldsymbol{x} = (4,2)$, $\boldsymbol{y} = (0,1)$, $\boldsymbol{z} = (-1,1)$

   e) $\boldsymbol{x} = (1,3,1)$, $\boldsymbol{y} = (1,2,0)$, $\boldsymbol{z} = (1,-1,2)$

   f) $\boldsymbol{x} = (1,3,1)$, $\boldsymbol{y} = (2,6,2)$, $\boldsymbol{z} = (1,-1,2)$

6. **Índice de precios**. Considere una economía de tres bienes. Los precios (**p**) y cantidades (**q**) de bienes en el periodo inicial (t=0) y periodo final (t=1) se muestran en la siguiente tabla

	Precio (t=0)	Cantidad (t=0)	Precio (t=1)	Cantidad (t=1)
Bien 1	2	50	1,8	90
Bien 2	1,5	90	2,2	70
Bien 3	0,8	130	1	100

   a) Estimar la inflación (cambio porcentual sobre el nivel de precios) para esta economía por el índice de Laspeyres.

$$P_L = \frac{\boldsymbol{p}^t \cdot \boldsymbol{q}^0}{\boldsymbol{p}^0 \cdot \boldsymbol{q}^0}$$

   b) Estimar la inflación (cambio porcentual sobre el nivel de precios) para esta economía por el índice de Pasche.

$$P_P = \frac{\boldsymbol{p}^t \cdot \boldsymbol{q}^t}{\boldsymbol{p}^0 \cdot \boldsymbol{q}^t}$$

Semana 2: Sesión 2

Matrices

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante usa las matrices para el manejo de datos y la estadística.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Calcule el rango de las siguientes matrices, interprete su resultado y diga si son de rango completo.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Calcule los siguientes determinantes usando i) Laplace, y ii) Gauss (convirtiendo en una matriz triangular superior con operaciones elementales de filas)

   a) $A = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

   b) $B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

   c) $|AB|$

   d) $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. Calcular la inversa de las siguientes matrices, usando i) adjunta ($A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$; y ii) Gauss.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = 10 \cdot A = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Semana 3: Sesión 2

Sistema de ecuaciones lineales

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante emplear los métodos de solución de sistema de ecuaciones en modelos macro y microeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, con i) Cramer, ii) inversión de matrices, iii) Eliminación Gaussiana, y iv) Gauss-Jordan. (Pista: Recuerde que primero debemos verificar si ($|A| \neq 0$), es decir si es singular o no, todo ello para verificar si tienen soluciones únicas, infinitas, o si no tienen solución.

   a) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_1 = -5 \\ x_2 - 50x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 - x_4 + x_2 = 1 \end{cases}$

2. **Modelo IS-LM: economía cerrada** Se puede considerar que la economía está constituida por dos sectores: el mercado de bienes y servicios, y el monetario. El mercado de bienes tiene que ver con las siguientes ecuaciones. (Tomada de Chiang, 2006, p. 109).

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= a + b(1-t)Y \\ I &= d - ei \\ \mathrm{G} &= G_0 \end{aligned}$$

donde Y es el PBI o renta, C es el consumo, I es la inversión, G es el gasto público (exógeno) determinado por la autoridad fiscal, i es la tasa de interés, t es la tasa de impuestos, mientras que los demás son parámetros (positivos) de la economía (c, b, d, e). Asimismo, el mercado de dinero se define por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= a + b(1-t)Y \\ I &= d - ei \\ \mathrm{G} &= G_0 \end{aligned}$$

donde Y es el PBI o renta, C es el consumo, I es la inversión, G es el gasto público (exógeno) determinado por la autoridad fiscal, i es la tasa de interés, t es la tasa de impuestos, mientras que los demás son parámetros (positivos) de la economía (c, b, d, e). Asimismo, el mercado de dinero se define por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} M^d &= kY - hi \\ M_s &= M_0 \end{aligned}$$

donde Md es la demanda de dinero y Ms es la oferta de dinero (exógeno) determinada por el banco central; mientras que los demás son parámetros (k, h) positivos. Si el mercado de dinero está en equilibrio (Ms = Md) se cumple que

$$M_0 = kY - hi$$

Por lo tanto, los dos sectores proporcionan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y - C - I &= G_0 \\ b(1-t)Y - C &= -a \\ I + ei &= d \\ kY - hi &= M_0 \end{aligned}$$

Resuelva los siguientes:

a. Escriba el sistema en su forma matricial, considerando que las variables (endógenas) de equilibrio a resolver son: Y, C, I e i.

b. Diga si el sistema tiene solución única o no. No olvide que los parámetros son positivos.

c. Use el método de Cramer y encuentre la solución equilibro de cada variable.

d. De otro lado, en las ecuaciones del mercado de bienes, remplace todas las ecuaciones en la primera y obtenga una sola ecuación para el mercado de bienes, donde las únicas variables endógenas serán Y e i. Es decir, solo tendrá una ecuación para el mercado de bienes (IS) y otra para el mercado de dinero (LM).

e. Exprese en forma matricial las dos ecuaciones de del ítem anterior y resuelva usando Cramer.

f. Grafique las dos ecuaciones lineales (IS-LM) del ítem anterior e identifique los equilibrios respectivos. En el plano de las ordenadas tendrá a Y y en las abscisas a i.

Semana 4: Sesión 2

Tópicos avanzados en álgebra lineal

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante comprende los resultados de formas cuadráticas, matrices definidas y particionadas

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Determine i) los valores y vectores propios de las siguientes matrices, hallando explícitamente la matriz T; ii) rango y el determinante de las siguientes matrices usando sus valores propios; iii) A^{10}; y iv) $|A^6|$.

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Determinar si las siguientes matrices son definidas (o semidefinidas) positivas, negativas o no definidas (Utilice el método de valores propios).

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$

   g) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   h) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Segunda

Unidad

Cálculo de una variable y multivariable

Semana 5: Sesión 2

Cálculo de una variable 1

Sección: .... Fecha: …/…/..... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante usa las derivadas en el análisis de modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Encuentre la derivada (f'(x)) de cada una de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = (x - 2)(2x + 3)$
   b) $f(x) = (x + x^{-1})^3$
   c) $f(x) = 1/x$
   d) $f(x) = 2\ln x + \sin(x)$
   e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}$
   f) $f(k) = sk^{\alpha} - (n + \delta)k$

2. Encuentre la primera (f'(x)), segunda (f''(x)) y tercera (f'''(x)) de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$
   b) $f(r) = +\sqrt[3]{r}$
   c) $f(x) = e^x - x^3$
   d) $f(x) = 2\, ln\, x. sin(x)$

3. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a cada una de las siguientes funciones en el punto x = 1.
   a) $f(x) = x^4 + 2e^x$
   b) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

c) $f(x) = x - \sqrt{x}$

4. Encuentre la derivada (f'(x)) de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$

b) $f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^{1/2}}$

c) $f(x) = \frac{1 - xe^{x^4}}{x + e^x}$

d) $f(x) = \frac{(9x-1)(3x^{\frac{1}{3}} - 1/x)}{4 - \ln x}$

5. Encuentre la primera (f'(x)) y segunda derivada (f''(x)) de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (1 + x + 2x^2)^{-1/3}$

b) $f(x) = e^{x^2} + \sqrt{x}$

c) $f(x) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x}\right)$

d) $f(x) = 5^{x^2+x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{1 + 2e^{2x}}$

f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-4x}}$

h) $f(k) = [k + (k + \sin k^2)^3]^4$

6. **Funciones en economía.** A menudo en economía es necesario encontrar las derivadas de funciones famosas. Calcule sus primeras derivadas e interprete.

a) La función de costos cúbica: $C(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$. A su derivada se le conoce como el *costo marginal* (Cmg)

b) La función de consumo de Keynes: $C(Y) = 2000 + 0{,}9Y$. La derivada se le conoce como la *propensión marginal a consumir* (PMC).

c) La función de producción Coob-Douglas: $q(k) = \lambda l^{\beta} k^{\alpha}$. A la derivada se le conoce como el *producto marginal del capital* (Pmgk).

d) Otra función de producción más importante es la denominada CES: $q(k) = A[\lambda l^{\rho} + \beta k^{\rho}]^{1/\rho}$. A la derivada también se le conoce como el *producto marginal del capital* (Pmgk).

Semana 6: Sesión 2

Optimización en una variable

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante usa el cálculo y la optimización en una variable para realizar gráficas y análisis de modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Graficar las siguientes funciones, indicando los puntos críticos, intervalos de crecimiento, máximos y mínimos locales (y globales si los hubiese), puntos de inflexión, intervalos de convexidad.
   a) $f(x) = -2x^2 + 8x + 25$
   b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$
   c) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
   d) $f(x) = f(x) = 2x^3 - 45x^2 + 300x + 500$
   e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 3$
   f) $f(x) = x^2e^x$
   g) $f(x) = xe^x$

2. **Una firma competitiva.** La función de costo de una empresa competitiva es
$$C(q) = q^3 + 10q + 900$$
Donde se puede observar que el costo variable es $CV(q) = q^3 + 10q$ y el costo fijo es $CF = 900$.
   a) Encuentre el costo marginal ($Cmg = \frac{dC(q)}{dq}$), el costo medio ($Cme = \frac{C(q)}{q}$), costo

variable medio ($CVme = \frac{CV(q)}{q}$) y el costo fijo medio ($CFme = \frac{CF}{q}$). Grafíquelos individualmente.

b) Encuentre la función de oferta inversa de la empresa, $p = Cmg(q)$, y grafíquela. Donde p es el precio. Recuerde que el Cmg es la función inversa de la oferta desde el punto en el que $Cmg = CVMe$ (punto mínimo del $CVMe$).

c) Asumiendo que p = 80, formule la función de ganancia a maximizar en términos de q: $Max_q \, \Pi(q) = I(q) - C(q)$. Recuerde que, al ser una empresa competitiva, $I(q) = pq$.

d) Use la condición de primer orden para encontrar la cantidad producida óptima $q*$ de la firma.

e) Determine el $q*$ máximo relativo con la condición de segundo orden.

f) Calcule el beneficio máximo de la empresa, si es que existe.

g) En un solo gráfico, grafique la demanda (que es $Img = p$, es decir una constante), costo marginal y costo medio; además, la cantidad y beneficio óptimo.

3. **Monopolio uniproducto.** Sean las funciones de demanda inversa, ingreso y costo de un monopolio, respectivamente:

$$P = 1200 - 2Q$$

$$I(Q) = 1200Q - 2Q^2$$

$$C(Q) = Q^3 - 61{,}25Q^2 + 1528{,}5Q + 2000$$

a) Encuentre el costo marginal, ingreso marginal y costo medio.

b) Formule la función de ganancia a maximizar: $Max_Q \, \Pi(Q) = I(Q) - C(Q)$.

c) Use la condición de primer orden para encontrar la cantidad producida óptima $Q*$ del monopolista.

d) Determine el $Q*$ máximo relativo con la condición de segundo orden.

e) Calcule el precio que debe cobrar el monopolista.

f) Calcule el beneficio máximo del monopolista, si es que existe.

g) En un solo gráfico, grafique la demanda, ingreso marginal, costo marginal y costo medio; además, ubique el precio, la cantidad y beneficio óptimo.

Semana 7: Sesión 2

Cálculo multivariable 1

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica el cálculo multivariable en modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Dadas las siguientes funciones, encuentre las curvas de nivel y grafícalas en el dominio de la función.
   a) $f(x_1, x_2) = x_2 + \ln x_1$
   b) $f(x_1, x_2) = x_2 + e^{x_1}$
   c) $f(x_1, x_2) = x_2 - e^{x_1}$
   d) $f(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$
   e) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 6x_2$
   f) $f(x_1, x_2) = (4x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}}$
   g) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$
   h) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$
   i) $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$
   j) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$
   k) $f(x_1, x_2) = x_{1/}x_2$

2. Encuentre hasta las derivadas de tercer orden de las siguientes funciones.
   a) $f(x, y) = 6xy^2$
   b) $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(xy + x + y)$
   c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$
   d) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2+5)}{y}$

3. Dadas las siguientes funciones, encuentre las primeras y segundas derivadas, luego exprésalas de forma del vector gradiente y la matriz hessiana. Evalúalas cada una de ellas en el punto $(x_1, x_2) = (1,2)$ y verifique si las matrices son definidas (semidefinidas) positivas o negativas.

   a) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$
   b) $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$
   c) $f(x_1, x_2) = x_2 - 2e^{-x_2}$
   d) $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$
   e) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$
   f) $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$

4. Utilice la regla de la cadena para hallar dy/dt en las siguientes funciones.

   a) $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$, donde $x_1 = t^2$ y $x_2 = t^3$
   b) $z = f(x, y) = x\, ln\, y + y\, ln\, x$, donde $x = t + 1$ y $y = \ln t$
   c) $z = f(y, t) = t^2 + ye^y$, donde $y = t^2$
   d) $z = f(x, y, w, t) = \frac{5t^2+3xy}{2w^2y}$, donde $x = t^2 + 1$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$ y $w = e^t + 1$

Semana 8: Sesión 2

Cálculo multivariable 2

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante comprende las funciones implícitas, la estática comparativa y polinomios de Taylor para el análisis en modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Dada las siguientes funciones implícitas, calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$. Sabemos que $z = f(x, y)$.

   a) $3x + y - z = 0$

   b) $xyz + xz^3 - xy^2z^5 = 1$

   c) $e^{xyz} = xyz$

   d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$

   e) $x^y + y^x + z^x = 5$

2. Dados los siguientes sistemas de funciones implícitas, calcule las derivadas implícitas respecto de cada variable independiente. Las variables dependientes son y, w y z, mientras que las independientes son x y r.

   e) $$\begin{aligned} z^2 - 2y + x &= 0 \\ y + x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

   f) $$\begin{aligned} z + x^4 + 2 &= 0 \\ y - 2x^2 - z &= 0 \end{aligned}$$

   g) $$\begin{aligned} y + z + x^4 + 2 &= 0 \\ w - xy - 2x^2 &= 0 \\ 2z + x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

   h) $$\begin{aligned} xy - 2z + x^3 + r &= 0 \\ w - 2rx &= 0 \\ w^2 - r + 2y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

3. **Mercado competitivo.** Consideremos el siguiente modelo microeconómico

$$q = \alpha - \beta p + \delta I$$

$$q = -\gamma + \sigma p$$

donde las ecuaciones representan las funciones de demanda y oferta, respectivamente. Las variables precio (p) y cantidad (q) son las variables endógenas (dependientes); y la variable ingreso (I) es la única exógena (independiente). Los parámetros α, β, δ, γ, σ son todos positivos.

a) Modifique las ecuaciones llevando todo al primer miembro.

b) Diferencie totalmente las ecuaciones teniendo en cuenta las variables exógenas y endógenas.

c) A continuación, despeje y ordene en el primer miembro las variables endógenas y en la parte izquierda, las exógenas.

d) Exprese estas ecuaciones como un sistema, luego divida a ambos lados el diferencial del ingreso.

e) Resuelva el sistema para encontrar cómo responde el precio y la cantidad de mercado al cambio del ingreso de las familias; es decir, halle dq/dI y dp/dI.

f) Finalmente, interprete los resultados de las derivadas. ¿Serían estos resultados matemáticos consistentes con el análisis intuitivo que usted realizaría?

Tercera **Unidad**

Optimización estática multivariable

Semana 9: Sesión 2

Optimización sin restricciones

Sección: .... Fecha: …/…/..... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante hace uso de las matemáticas de optimización sin restricciones para resolver modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. En las siguientes funciones, encontrar: i) los óptimos (puntos críticos) con la condición de primer orden; ii) determinar si son máximos, mínimos o ninguna (ensilladura) con la condición de segundo orden; y iii) calcular el valor máximo o mínimo respectivo.
   a) $opt_{x_1,x_2}\ z = f(x,\ y) = -x^2 - y^2$
   b) $opt_{x_1,x_2}\ z = f(x,\ y) = x^2 + 2y^2$
   c) $opt_{x_1,x_2}\ z = f(x,\ y) = xy - x + y$
   d) $opt_{x_1,x_2}\ z = f(x,\ y) = 2x^2 - xy + y^2$
   e) $opt_{x_1,x_2}\ z = f(x,\ y,\ w) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - w(x + y - 200)$

2. **Maximización de la producción.** Suponga que una firma tiene la siguiente función de producción.

$$q = f(k, l) = 2{,}18l^2\ -\ 0{,}021l^3\ +\ 1{,}97k^2\ -\ 0{,}03k^3$$

a) Calcule las cantidades óptimas de capital y trabajo (k^*) y (l^*) que debe contratar la empresa para maximizar su producción.

b) Compruebe si en verdad estas cantidades son las que maximizan la producción.

c) Calcule la producción máxima, si existe.

3. **Empresa competitiva multiproducto.** Una empresa de Huancayo produce dos tipos de bienes (q_1 y q_2) que se venden a los precios $p_1 = 12$ y $p_1 = 18$, respectivamente, en dos mercados competitivos. Su función de costo es el siguiente.

$$C(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1 q_2 + 2q_2^2$$

a) Calcule las cantidades óptimas (q_1^* y q_2^*) que debe producir de cada bien esta empresa para maximizar sus beneficios.

b) Compruebe si en verdad estas cantidades son las que maximizan la producción.

c) Calcule la producción máxima, si existe.

4. **Monopolio multiproducto.** Una empresa monopolista de Huancayo produce dos tipos de bienes (Q_1 y Q_2) con las siguientes demandas respectivas.

$$Q_1 = 40 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_2 = 15 + P_1 - P_2$$

Asimismo, su función de costes es el siguiente

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$$

a) De las ecuaciones de demanda, despeje los precios mediante el método de Cramer.

b) Formule la función de ganancia a maximizar del monopolista en términos de Q_1 y Q_2: $\max_{Q_1} \Pi(Q_1, Q_2) = I(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2)$.

c) Use la condición de primer orden para encontrar las cantidades producidas óptimas Q_1^*y Q_2^* del monopolista.

d) Determine si Q_1^* y Q_2^* son máximos relativos con la condición de segundo orden.

e) Calcule los precios que debe cobrar el monopolista.

f) Calcule el beneficio máximo del monopolista, si es que existe.

Semana 10: Sesión 2

Optimización con restricciones de igualdad 1

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante hace uso de las matemáticas de optimización con restricciones en modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. En las siguientes funciones, dadas las restricciones, encontrar: i) la función lagrangiana; ii) los óptimos (puntos críticos) con la condición de primer orden; iii) determinar si son máximos, mínimos o ninguna (ensilladura) con la condición de segundo orden; y iv) Calcular el valor máximo o mínimo respectivo.
   a) $opt_{x,y}\ z = f(x,\ y) = x^2 + 4y^2 + 6$ s.a. $2x - 8y = 20$
   b) $opt_{x,y}\ z = f(x,\ y) = xy$ s.a. $x + 3y = 24$
   c) $opt_{x,y}\ z = f(x,\ y) = x^{1/2}y^{1/2}$ s.a. $x + 2y = 100$
   d) $opt_{x,y}\ z = f(x,\ y) = x^2 + y^2$ s.a. $x + 2y = 4$
   e) $opt_{x,y}\ z = f(x,\ y) = 3x - y + 6$ s.a. $x^2 + y^2 = 4$
   f) $opt_{x,y,w}\ z = f(x,\ y,\ w) = x^2 + y^2 + w^2$ s.a. $x - y + 2w = 6$
   g) $opt_{x,y,w}\ z = f(x,\ y,\ w) = x + y + w$ s.a. $xyw = 8$
   h) $opt_{x,y,w}\ z = f(x,\ y,\ w) = x^2 + 2y - w^2$ s.a. $2x - y = 20$ y $y + w = 0$

2. **El problema de consumidor.** Dado el siguiente problema de maximización de la

utilidad (U) del consumidor.

$$\max_{X_1,X_2} \mathrm{U}(x_1, x_2)$$

$$s.a.\ p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades de bienes consumidas; p_1 y p_2 son sus precios respectivos; y m es el ingreso.

Con las siguientes funciones de utilidad específicas, se le pide: i) plantear la función lagrangiana; ii) encontrar las demandas óptimas (puntos críticos) con la condición de primer orden; iii) determinar si son máximos, mínimos o ninguna (ensilladura) con la condición de segundo orden; y iv) Calcular el valor máximo o mínimo respectivo de la utilidad (función indirecta de utilidad) Calcule las cantidades óptimas de capital y trabajo (k^*) y (l^*) que debe contratar la empresa para maximizar su producción.

a) $U(x_1.x_2) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, donde $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.
b) $U(x_1.x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, donde $\alpha > 0$.
c) $U(x_1.x_2) = (x_1 - a)^{\alpha_1}(x_2 - b)^{\alpha_2}$, donde $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $a > 0$ y $b > 0$.
d) $U(x_1.x_2) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$, donde $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.
e) $U(x_1.x_2) = \ln x_1 + x_2$.

3. **Minimización de costos.** Una empresa desea minimizar su costo eligiendo la cantidad de trabajo (l) y capital (k) a contratar, teniendo en cuenta un nivel de producción (q) a alcanzar, dada el proceso de producción, $f(l,k)$. El problema por resolver se plantea de la siguiente manera

$$\max_{lk} C(l,k) = wl + rk$$

$$s.a.\ f(l,k) = \bar{q}$$

donde w es el salario por hora y r es el precio del alquiler del capital. Asumiendo que la función de producción es del tipo Coob-Douglas: $f(l,k) = l^{1-\alpha}k^{\alpha}$, desarrolle lo siguiente:

a) Formule el problema de optimización y la función lagrangiana.
b) Use las condiciones de primer orden y encuentre las cantidades óptimas de trabajo y capital que debe contratar la empresa.
c) Con las condiciones de segundo orden determine si los óptimos encontrados son máximos relativos.
d) Determine el costo mínimo (también llamado función de costo mínimo de

largo plazo).

e) Desarrolle todo lo anterior asumiendo los siguientes datos: α = 1/2, w = 2, r = 1 y q = 1000.

Semana 11: Sesión 2

Optimización con restricciones de igualdad 2

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante identifica el teorema de la envolvente en los modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Si l miles de dólares es gastado en mano de obra y k miles de dólares en equipamiento, cierta empresa $Q(x,y) = 50x^{1/2}y^2$.
   a) Cómo debería asignarse 80 000 dólares entre trabajo y capital para obtener la producción máxima posible.
   b) Use el teorema de la envolvente para estimar el cambio en la producción máxima si la asignación decrece en 1000 dólares.

2. Use el teorema de la envolvente para demostrar los siguientes:
   a) Ecuación de Roy en un problema de maximización de utilidad del consumidor.
   b) Ecuación de Shepard en un problema de minimización de gasto del consumidor.

Semana 12: Sesión 2

Estática comparativa

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica la estática comparativa en modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Determine si las siguientes funciones son homogéneas. Si lo son, ¿de qué grado? (Chiang, 2006, p. 389)
   a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$
   b) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^{1/2}$
   c) $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$
   d) $f(x,y) = 2x + y + 3\sqrt{xy}$
   e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{w} + 2xw$
   f) $f(x,y) = x^4 - 5yw^3$

2. Sea el producto una función de tres insumos: $Q = F(K, L, N) = AK^aL^bN^c$ (Tomada de Chiang, 2006, p. 390)
   a) ¿Es homogénea esta función?
   b) ¿Bajo qué condición habría retornos constantes a escala? ¿Retornos crecientes a escala?
   c) Encuentre la participación del producto para el insumo N, si se paga por la cantidad de su producid marginal.

3. Sea la función de producción $Q = f(K, L)$ homogénea de grado 2 (Tomada de Chiang, 2006, p. 390).
   a) Escriba una ecuación para expresar la propiedad de homogeneidad de segundo grado de esta función.
   b) Encuentre la función MPP_k. ¿Es todavía MPP_k una función solamente de k, como en el caso de homogeneidad lineal?
   c) ¿Es homogénea la función MPP_k en K y L? Si lo es, ¿de qué grado?

4. Suponga que $\max_{x,y} U(x, y) = (x - 2)(y - 1)$, $s.a. P_x x + P_y y = m$. Encuentre lo siguiente (no asigne valores numéricos específicos a los parámetros de precio e ingreso).
   a) Escriba la función lagrangiana.
   b) Encuentre x^*, y^*, λ^* en los términos de los parámetros P_x, P_y, m.
   c) Verifique la condición suficiente del orden segundo para el máximo.

Cuarta **Unidad**

Programación lineal y no lineal

Semana 13: Sesión 2

Programación lineal

Sección: .... Fecha: …/…/..... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 4

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante usa la programación lineal para resolver modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

Los siguientes problemas son adaptados de Sydsæter et al. (2021).

1) Use el método gráfico para resolver los siguientes problemas de programación lineal.

   a) $\max\limits_{x,y} Z = 3x + 4y$ s.a. $\begin{cases} 3x + 2y \leq 6 \\ x + 4y \leq 4 \end{cases}$ y $x \geq 0,\ y \geq 0$

   b) $\max\limits_{x,y} Z = 10x + 27y$ s.a. $\begin{cases} x + 2y \leq 11 \\ 2x + 5y \leq 20 \end{cases}$ y $x \geq 0,\ y \geq 0$

   c) $\max\limits_{x,y} Z = 2x + 5y$ s.a. $\begin{cases} -2x + 3y \leq 6 \\ 7x - 2y \leq 14 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ y $x \geq 0,\ y \geq 0$

2) Considere el siguiente problema:

$$\max_{x,y} Z = x + y \quad \text{s.a.} \begin{cases} -x + y \leq -1 \\ -x + 3y \leq 3 \end{cases} \text{ y } x \geq 0,\ y \geq 0$$

   a) Verifique si existe una solución para este problema.

   b) Verifique si existe una solución si es que el objetivo es ahora $z = -x - y$.

3) Una empresa produce dos tipos de televisores: uno económico de tipo A y uno caro de tipo B. La empresa obtiene una ganancia de US$ 700 por cada televisor de tipo A y US$ 1 000 por cada televisor de tipo B. Hay tres etapas en el proceso de producción, cada uno de los cuales requiere su propio tipo de mano de obra especializada. La etapa I requiere tres unidades de mano de obra en cada conjunto de tipo A y cinco unidades de mano de obra en cada conjunto de tipo B. La cantidad total de mano de obra disponible para esta etapa es 3 900. La etapa II requiere una unidad de mano de obra en cada conjunto de tipo A y tres unidades en cada conjunto del tipo B. La mano de obra total disponible para esta etapa es 2 100 unidades. En la etapa III, se necesitan dos unidades de mano de obra para cada tipo y se encuentran disponibles 2 200 unidades de mano de obra.

a) ¿Cuántos televisores de cada tipo debería producir la empresa para maximizar sus ganancias?

b) ¿Cuál es la ganancia obtenida?

4) Considere el siguiente problema:

$$\max_{x,y} Z = 2x + 7y \quad \text{s.a.} \begin{cases} 4x + 5y \leq 20 \\ 3x + 7y \leq 21 \end{cases} \text{ y } \; x \geq 0,\; y \geq 0$$

c) Resuelva el problema mediante el método gráfico.

d) Reescriba el problema dual y resuélvelo mediante un argumento gráfico.

e) ¿Son iguales los valores de las funciones objetivo?

Semana 14: Sesión 2

Programación no lineal

Sección: .... Fecha: …/…/..... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 4

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante hace uso de la programación lineal para resolver modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

Los siguientes problemas son adaptados de Sydsæter et al. (2021).

1) Considere el siguiente problema:

$$\max_{x,y} Z = -x^2 - y^2 \quad \text{s.a.} \quad x - 3y \leq -10$$

a) Encuentre la solución óptima (x^*, y^*) que resuelve el problema.

b) Verifique si existe una solución si es que el objetivo es ahora $z = -x - y$.

2) **Problema del consumidor**. Considere el siguiente problema:

$$\max_{x,y} U(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{s.a.} \quad p_x x + p_y y \leq m$$

a) Encuentre las funciones de demanda (x^*, y^*) que optimiza el problema, las cuales están en función a los parámetros.

b) Verifique si las funciones de demandas son homogéneas de grado cero.

3) Considere el problema:

$$\max_{x,y} U(x,y) = 4 - \frac{1}{2}x^2 - 4y \quad \text{s.a.} \;\; 6x - 4y \leq a$$

a) Escriba las condiciones de KKT.

b) Resuelva el problema.

c) Si $V(a)$ denota la función de valor máxima, verifique que $V'(a) = \lambda$, donde λ es el multiplicador lagrangiano encontrado en el ítem anterior.

4) Considere el problema

$$\max_{x,y} Z(x,y) = \frac{1}{2}x - y \quad \text{s.a.} \;\; x + e^{-x} \leq y \text{ y } x \geq 0$$

a) Escriba el lagrangiano y las condiciones necesarias KKT.

b) Resuelva el problema.

5) Sean p_x, p_y y m parámetros positivos y supongamos que $0 < \alpha < 1$. Resuelva el siguiente problema de demanda del consumidor donde, además de la restricción presupuestaria, existe un límite superior $\bar{x}$ que raciona la cantidad del primer bien puede ser comprado:

$$\max_{x,y} U(x,y) = \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y \quad \text{s.a.} \;\; p_x x + p_y y \leq m \quad \text{y} \quad x \leq \bar{x}$$

Semana 15: Sesión 2

Integración en una variable

Sección: .... Fecha: …/…/..... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 4

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica las integrales en una variable para analizar modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Calcular las siguientes integrales usando las reglas básicas.

   a) $\int x^{13}\,dx$

   b) $\int x\sqrt{x}\,dx$

   c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

   d) $\int (t^3 + 2t - 3)\,dt$

   e) $\int (x-1)^2\,dx$

   f) $\int (x-1)(x+2)\,dx$

   g) $\int (e^{3x} - e^{2x} + e^x)\,dx$

   h) $\int \frac{x^3+3x+4}{x}dx$

   i) $\int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$

2. Calcular las siguientes integrales usando el método de sustitución.

   a) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

   b) $\int x(1+x^2)^{15}\,dx$

   c) $\int \sqrt{x+2}\,dx$

   d) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

   e) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

   f) $\int 2x^4 e^{x^5+2}\,dx$

   g) $\int (6t^2+4t)(t^3 + t^2+1)^6\,dt$

   h) $\int x(4x^2+1)^{-1}\,dx$

   i) $\int \frac{6x^2+8}{x^3+4x}dx$

   j) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

   k) $\int \frac{1}{\ln x}\,dx$

3. Calcular las siguientes integrales usando el método de integración por partes.

a) $\int xe^x\,dx$
b) $\int xe^{-x}\,dx$
c) $\int x^2e^{-x}\,dx$
d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
e) $\int x\ln x\,dx$
f) $\int \ln x\,dx$
g) $\int \frac{\ln x}{x}dx$
h) $\int \ln 4x\,dx$
i) $\int (\ln x)^2 dx$
j) $\int x\sqrt{1+x}\,d$

4. Calcular las siguientes integrales usando el método de integración por partes.
   a) $\int xe^x\,dx$
   b) $\int xe^{-x}\,dx$
   c) $\int x^2e^{-x}\,dx$
   d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

5. Calcular las siguientes integrales usando fracciones parciales:
   a) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}dx$
   b) $\int \frac{x}{x^2+x-2}dx$
   c) $\int \frac{1}{(x^2-9)^2}dx$
   d) $\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}dx$

6. Calcular las siguientes integrales definidas:
   a) $\int_0^1 x\,dx$
   b) $\int_1^2 (2x+x^2)\,dx$
   c) $\int_{-2}^3 (\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)\,dx$
   d) $\int_0^2 (t^3-t^4)\,dt$
   e) $\int_1^2 (2t^5-\frac{1}{t^2})\,dt$
   f) $\int_2^3 (\frac{1}{t-1}+t)\,dt$
   g) $\int_{-3}^{-1} \varepsilon^2\,d\varepsilon$
   h) $\int_0^1 \frac{x^2+x+\sqrt{x+1}}{x+1}dx$

7. Hallar el área comprendida entre las siguientes funciones $y=(x-1)^2$ y $x=\frac{1}{3}y^2$. Grafique sus resultados.

8. Hallar las siguientes integrales impropias:
   a) $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$
   b) $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$
   c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$
   d) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$
   e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$
   f) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx\ \ (p\neq 1)$
   g) $\int_0^1 \ln x\,dx$
   h) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$
   i) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$
   j) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
   k) $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$

9. Excedente del consumidor y productor. Supongamos que las curvas inversas de oferta y demanda de un bien en particular son, respectivamente,

$$P=f\,(Q)=\frac{6000}{Q\,+\,50}$$

$$P = g(Q) = Q + 10$$

Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio, luego calcule el excedente del consumidor y del productor.

Semana 16: Sesión 2

Tópicos avanzados en Integración

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 4

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Desarrollar los siguientes ejercicios y problemas de manera individual. Puede usar todo tipo de materiales como apuntes, formularios, libros, calculadora, celulares, páginas Web, entre otros.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante usa los conceptos avanzados de integrales para el análisis de modelos micro y macroeconómicos.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{\alpha}^{\alpha^2}(x^2+\alpha x+3)\,dx\right)$

   b) $\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{0}^{1}(2\alpha x+2)\,dx\right)$

   c) $\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{0}^{\alpha}(2x)\,dx\right)$

   d) $\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{\alpha}^{0}(3x^2+2x)\,dx\right)$

   e) $\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{0}^{1}\left(xe^{\alpha x^2}\right)dx\right)$

2. Calcular las siguientes integrales múltiples:

   a) $\int_0^3\int_0^4 x\,dydx$

   b) $\int_0^1\int_0^1 xy\,dxdy$

   c) $\int_1^3\int_1^2 (x^2-y)\,dxdy$

   d) $\int_2^3\int_0^{2x} y\,dydx$

   e) $\int_0^1\int_0^y e^{x+y}\,dxdy$

   f) $\int_0^1\int_0^2\int_0^3 xy^2z^3\,dxdydz$

   g) $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y} x^2\,dzdydy$

   h) $\int_1^e\int_{\ln x}^x\int_0^y dzdydy$

3. **Estadística (densidad conjunta)**. La siguiente pregunta se basa en Haeussler (2015, p. 792). En el estudio de la estadística, una función de densidad conjunta $z=f(x,y)$

definida sobre una región del plano x, y se representa mediante una superficie en el espacio. La probabilidad de que

$$a \leq x \leq b \text{ y c} \leq y \leq d$$

está dada por

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

y se representa mediante el volumen localizado entre la gráfica de f y la región rectangular dada por

$$a \leq x \leq b \text{ y c} \leq y \leq d$$

Si $f(x,y) = e^{-(x+y)}$ es una función de densidad conjunta, donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$, encuentre

$$P(0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$$

y escriba su respuesta en términos de e.

4. **Estadística (densidad conjunta)**. Tomando en cuenta el problema anterior, sea $f(x,y) = 6e^{-(2x+3y)}$ para $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Encuentre

$$P(1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4)$$

y escriba su respuesta en términos de e.

Referencias

Aleskerov F., Ersel, H., y Piontkovski, D. (2011). *Linear algebra for economists.* Springer.

Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática.* (4.ª ed.). Mcgraw Hill.

Grossman, S. y Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal.* (7.ª ed.). McGraw Hill.

Haeussler, E., y Paul, R. (2015). *Matemáticas para administración y economía.* (13.ª ed.). Pearson educación.

Hoy, M., and Livernois, J. (2022). *Mathematics for economics.* (4th ed.). The MIT Press.

Simon, C., and Blume, L. (1996). *Mathematics For Economists*. W.W. Norton & Company.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Prentice Hall.

Sydsæter, K., Hammond, P., Strom, A. y Carvajal, A. (2021). *Essential mathematics for economic analysis*. (6th ed.). Pearson Education.

Recursos digitales

Banco de Desarrollo de América Latina. (2024). *Matemáticas II.* (2.ª ed.) [curso]. https://miriadax.net/curso/matematicas-ii-2-a-edicion/

Geogebra. (2024). Geogebra [software]. https://www.geogebra.org/?lang=es

PositCloud. (2024). *R cloud* [software]. https://posit.cloud/

QuantEcon. (2024). Introduction to Economic Modeling and Data Science [curso]. https://datascience.quantecon.org/

University of California. (2013). *Math for economists* [curso]. https://ocw.uci.edu/courses/math_4_math_for_economists.html