Universidad Continental

Guía de Trabajo

Cálculo Integral

Matilde Peña Casa

Contenido

Presentación

La guía de trabajo de Cálculo integral ha sido elaborada con el objetivo de proporcionar a los estudiantes una herramienta práctica y enfocada en la resolución de problemas clave para el dominio de esta importante área matemática. En lugar de abordar la teoría en profundidad, esta guía se centra exclusivamente en ofrecer una serie de ejercicios propuestos que permiten a los estudiantes practicar y aplicar los métodos de integración aprendidos en clase.

El cálculo integral es una disciplina fundamental en matemáticas y ciencias aplicadas, con aplicaciones esenciales en campos como la física, la ingeniería, la economía y la biología. La capacidad para resolver integrales es crucial para abordar problemas relacionados con el cálculo de áreas bajo curvas, volúmenes de sólidos y tasas de cambio acumuladas. Por lo tanto, la práctica regular con ejercicios es indispensable para desarrollar una comprensión sólida y efectiva de estas técnicas.

Cada ejercicio en esta guía ha sido seleccionado cuidadosamente para cubrir diferentes aspectos de la integración, desde las técnicas básicas hasta los métodos más avanzados. Los problemas incluyen integrales de funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y racionales, ofreciendo a los estudiantes una amplia gama de desafíos que facilitan el dominio de los conceptos y métodos de integración.

Los beneficios para los estudiantes al utilizar esta guía son múltiples. En primer lugar, al resolver los ejercicios propuestos, los estudiantes pueden aplicar de manera práctica los métodos de integración, lo que refuerza su comprensión teórica y mejora su capacidad para resolver problemas concretos. La práctica con una variedad de problemas también ayuda a desarrollar habilidades analíticas y de resolución de problemas, que son cruciales tanto para el éxito académico como para la aplicación profesional de los conocimientos adquiridos.

Además, la guía facilita la preparación para evaluaciones y exámenes al permitir a los estudiantes familiarizarse con los tipos de problemas que podrían encontrar en una evaluación formal. La repetición y enfrentamiento a diferentes tipos de ejercicios ayudan a consolidar los métodos y técnicas de integración, reforzando así el aprendizaje y aumentando la confianza en la materia.

Asimismo, la guía de trabajo se ha dividido en cuatro unidades y que son:
Unidad 1: Integrales indefinidas
Unidad 2: Integrales definidas
Unidad 3: Aplicaciones de la integral definida
Unidad 4: Integrales múltiples

Matilde Peña Casa

Primera **Unidad**

Integrales indefinidas

Semana 1: Sesión 2

Integral indefinida: antiderivada, integración directa e Integración por cambio de variable

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.

Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce las propiedades y fórmulas de la integral definida para aplicarlas en la solución de los ejercicios presentes en la guía de trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.
2. Resuelve problemas que involucren encontrar la antiderivada de diversas funciones.
3. Aplica reglas básicas de integración para resolver problemas con funciones simples y compuestas.
4. Utiliza sustituciones para simplificar y resolver integrales complejas.

Primitivas o antiderivadas

Utilizando la diferenciación y la regla de la cadena, verifica el resultado de la integración proporcionada, es decir,

$$\frac{\boldsymbol{d\,F(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f(x)} \qquad \boldsymbol{cuando} \qquad \int \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{F(x)}$$

1) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{2\mathrm{ab}} \;\mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{bx-a}}{\mathrm{bx+a}}\right) + \mathrm{C}$

2) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{b^2x^2+a^2}} = \frac{1}{\mathrm{ab}} \;\mathrm{arc\,tan}\left(\frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}}\right) + \mathrm{C}$

3) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\mathrm{a^2-b^2x^2}}} = \frac{1}{\mathrm{b}} \;\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}}\right) + \mathrm{C}$

4) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{b^2x^2-a^2}}} = \frac{1}{\mathrm{a}} \;\mathrm{arc\,sec}\left(\frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}}\right) + \mathrm{C}$

5) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\mathrm{b^2x^2\pm a^2}}} = \frac{1}{\mathrm{b}} \;\mathrm{Ln}\left(\mathrm{bx} + \sqrt{\mathrm{b^2x^2 \pm a^2}}\right) + \mathrm{C}$

6) $\int \frac{e^{px}}{(\mathrm{x+q})^2}\; dx = -\frac{e^{px}}{p(x+q)} + \mathrm{C}$

7) $\int \frac{x^2\sin(kx)}{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{x\sin(kx)-\cos(kx)}{k} + \mathrm{C}$

8) $\int \frac{e^{mx}}{x^2+a^2}\; dx = \frac{e^{mx}}{2a}\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{C}$

9) $\int \frac{\cos(kx)}{x^2+a^2}\; dx = \frac{\pi\cdot\cos(kx)}{2a^3} + \mathrm{C}$

10) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) + \mathrm{C}$

Integración directa

Determinar las siguientes integrales indefinidas:

1) $I = \int \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)dx$

2) $I = \int \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx$

3) $I = \int \left(x^3+2\right)\left(\sqrt{x^3}-2\right)dx$

4) $I = \int \left(s^4-\frac{3}{s^5}\right)s^2 ds$

5) $I = \int \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{5x}}dx$

6) $I = \int \frac{5x^3-2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

7) $I = \int \left(\frac{2}{x^{-3}}-x^{-2}\right)^2 dx$

8) $I = \int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$

9) $I = \int \left(\sqrt[3]{x}+x^2-5\right)\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2 dx$

10) $I = \int \frac{(2x+a)^3 x}{\sqrt{4x}}dx$

11) $I = \int \left(\cos t+\frac{3}{1+t^2}-4^t\right)dt$

12) $I = \int (\sec x+3)^2 dx$

13) $I = \int \frac{dt}{\sqrt{t+4}-\sqrt{t+3}}$

14) $I = \int \frac{sen 2x}{sen x}dx$

15) $I = \int \frac{1+sen^2 x}{sen^2 x}dx$

16) $I = \int \frac{1+sen t}{t-\cos t}dt$

17) $I = \int \left(2\cot^2 x-3\tan^2 x\right)dx$

18) $I = \int \left(\frac{x^{e+1}+\cos a-xe^x}{x}\right)dx$

19) $I = \int \left(\frac{\cos^2 x-sen^2 x}{sen 2x}\right)dx$

20) $I = \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}dx$

Integración por cambio de variable

I. Resolver las siguientes integrales utilizando el método de sustitución o cambio de variable:

1) $\int (4x-2)^4 dx$

2) $\int 5\sqrt[5]{3-x}\,dx$

3) $\int \frac{3}{(4-5x)^6}dx$

4) $\int \frac{2}{\sqrt{4x+5}}dx$

5) $\int \frac{2}{(a+2x)^{1/3}}dx$

6) $\int \frac{1}{7x-3}dx$

7) $\int \frac{7}{5-3x}dx$

8) $\int t\sqrt{2t^2+3}\ dt$

9) $\int \frac{6z}{\left(5-3z^2\right)^2}dz$

10) $\int \frac{t^3}{\sqrt{a^4+3t^4}}dt$

11) $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt[5]{x^3+6x^2+12x+4}}dx$

12) $\int sen2x\sqrt{1+2\cos 2x}\ dx$

13) $\int sen^5(4x)\cos(4x)\ dx$

14) $\int \frac{sen\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

15) $\int \frac{dx}{(arcsenx)^5\sqrt{1-x^2}}$

16) $\int \frac{1}{\cos^2 3x\sqrt{2+\tan 3x}}dx$

17) $\int \frac{x\ln\left(x^2-3\right)}{x^2-3}dx$

18) $\int \frac{x}{\left(1+x^4\right)\arctan^3\left(x^2\right)}dt$

19) $\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}dx$

20) $\int \frac{\arctan\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}}dx$

21) $\int \sqrt{\frac{arcsenx}{1-x^2}}dx$

22) $\int \frac{3-x-\arctan 2x}{1+4x^2}dx$

23) $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 3x}}{1+9x^2}dx$

24) $\int \frac{3+4x\,arc\,sen(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

II. Resolver las siguientes integrales utilizando el método de sustitución o cambio de variable:

1) $\int (2x+4)sen\left(x^2+4x-6\right)dx$

2) $\int senx\, e^{-\cos x} dx$

3) $\int \sec x \tan x \cdot \cos(\sec x) dx$

4) $\int \frac{senx \cdot e^{\tan^2 x}}{\cos^3 x} dx$

5) $\int (\ln x + 1)\ e^{x \ln x} dx$

6) $\int \frac{x}{4 + x^4} dx$

7) $\int \frac{1}{e^{-x} + e^{x}} dx$

8) $\int \frac{(x^2 + 1) e^{\sqrt{x^3+3x}}}{\sqrt{x^3+3x}} dx$

9) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{5 + 3\ln x}} dx$

10) $\int \frac{(x^2 + 2)\cos\left(\sqrt{x^3 + 6x}\right)}{\sqrt{x^3 + 6x}} dx$

11) $\int \frac{\sec^2\left(arctan(3x^2)\right)\cdot x^2}{1+9x^6} \mathrm{dx}$

12) $\int \frac{2x\cdot exp\left(arcsin(\sqrt{x^2-3})\right)}{\sqrt{(4-x^2)(x^2-3)}} \mathrm{dx}$

13) $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx$

14) $\int \frac{senx}{1 + \cos^2 x} dx$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 - 20x - 9}} dx$

16) $\int \frac{x}{\sqrt{9 + 8x^2 - x^4}} dt$

17) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx$

18) $\int \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x} + 3e^x}} dx$

19) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{-2 - sen^2 x + 3senx}} dx$

20) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4\tan x + 1}} dx$

III. Resolver las siguientes integrales utilizando un cambio de variable:

1) $\int x\sqrt{x+1} dx$

2) $\int x^2\ \sqrt[3]{x+1} dx$

3) $\int \frac{1}{(1+4x)\sqrt{x}} dx$

4) $\int x^2 (x+1)^{11} dx$

5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

6) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$

7) $\int \frac{e^x\,\sqrt{e^x+2}}{e^x+6}\,dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{5+3\ln x}}\,dx$

9) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}dx$

10) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$

11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$

12) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^5-1}}dx\,9$

13) $\int \frac{x^2}{(4x+1)^{5/2}}dx$

14) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$

15) $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}dx$

16) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

17) $\int \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx$

18) $\int \frac{(x+2)}{x\sqrt{x-3}}dx$

19) $\int \frac{x+3}{(x+5)\sqrt{x+4}}dx$

20) $\int \frac{\left(2-\sqrt{2x+3}\right)}{1-2x}dx$

IV. Encuentra el resultado de las siguientes integrales:

1) $\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}dx$

2) $\int \frac{3x-5}{x^2-8x+42}dx$

3) $\int \frac{5x+3}{x^2+4x+4}dx$

4) $\int \frac{2x}{x^2+6x+13}dx$

5) $\int \frac{6-2x}{\sqrt{8-4x-4x^2}}dx$

6) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}dx$

7) $\int \frac{4-7x}{\sqrt{x^2+2x-8}}dx$

8) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

9) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-2x-17}}\,dx$

10) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x+4}}\,dx$

Aplicación de la integral indefinida

1. Una sustancia radiactiva se desintegra según la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = -0.1N$, donde N es la cantidad de sustancia y t es el tiempo en años. Si la cantidad inicial es de 500 gramos, encuentra la cantidad $N(t)$ que queda después de 5 años.

2. Un objeto se enfría en un ambiente a temperatura constante de 20 °C. La temperatura del objeto sigue la ecuación diferencial $\frac{dT}{dt} = -0.02(T - 20)$, donde T es la temperatura del objeto y t es el tiempo en minutos. Si la temperatura inicial del objeto es 80°C , encuentra la temperatura $T(t)$ después de 10 minutos.

3. La carga $Q(t)$ en un condensador de un circuito RC sigue la ecuación diferencial $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC}(E - Q)$, donde $E = 12\,V$, $R = 10\Omega$ y $C = 1\,F$. Encuentra $Q(t)$ si la carga inicial es 0.

4. Una masa en un resorte sigue la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$, donde x es la posición y el término 4 es una constante. Si la posición inicial es $x(0) = 1m$ y la velocidad inicial es $v(0) = 0\ m/s$, encuentra la función $x(t)$.

5. El modelo de crecimiento logístico se describe con la ecuación $\frac{dP}{dt} = -0.1P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$, donde P es la población y t es el tiempo en años. Si la población inicial es 100, encuentra la función $P(t)$.

6. Un objeto se mueve en un campo gravitacional donde la fuerza de gravedad varía con la altura h según $\frac{d^2h}{dt^2} = -g_0\left(1 + \frac{h}{H}\right)$, donde g_0 y H son constantes. Encuentra la altura $h(t)$ si la velocidad inicial es v_0 y la altura inicial es h_0.

Semana 2: Sesión 2

Integración por partes

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante emplea el método de integración por partes con atención a la precisión matemática para abordar los ejercicios de la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Resuelva los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.
2. Aplica el método de integración por partes a cada problema, elige u y dv apropiadamente, y resuelve cada integral paso a paso. Usa la fórmula correctamente y simplifica tus resultados.

Integración por partes

I. Determina las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

1) $\int x\sin 2x\,dx$

2) $\int (x+4)\cos 4x\,dx$

3) $\int x\cdot\sec^2 3x\,dx$

4) $\int x\cos 4x\,dx$

5) $\int x\cdot\sec 5x\cdot\tan 5x\,dx$

6) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

7) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

8) $\int x^5\sec^2\left(3x^3\right)dx$

9) $\int x e^{3x}\,dx$

10) $\int (2x+1)e^{7x}\,dx$

11) $\int (5x-3)(5)^{x}\,dx$

12) $\int \ln x\,dx$

13) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

14) $\int x^2 \ln x\,dx$

15) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

15) $\int \left(3x^2-2x+3\right)\ln x\,dx$

18) $\int (x+2)^{10}(3x+1)\,dx$

19) $\int x(2x+1)^{99}\,dx$

20) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

21) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$

22) $\int x^3\cos\left(x^2\right)dx$

23) $\int \frac{3e^{1/x}}{x^3}\,dx$

24) $\int \arcsin x\,dx$

25) $\int \arctan x\,dx$

26) $\int \arctan 3x\,dx$

27) $\int \arcsin 6x\,dx$

28) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

29) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

30) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

31) $\int \frac{\arcsin\sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}\,dx$

32) $\int x\arctan\sqrt{x^2-1}\,dx$

33) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

34) $\int \frac{x^5}{\sqrt{4+2x^3}}\,dx$

35) $\int x^7\sqrt{3x^4-5}\,dx$

36) $\int \cos x\cdot\ln(\sin x)\,dx$

II. Determina las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

1) $\int x\cos 3x\,dx$

2) $\int (2x-3)e^{4x}\,dx$

3) $\int x\tan^2(x)\,dx$

4) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$

5) $\int x\tan^2(x)\,dx$

6) $\int \ln(4+x^2)\,dx$

7) $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$

8) $\int \arctan 3x\,dx$

9) $\int \arcsin 6x\,dx$

10) $\int x^2 \arctan(x)dx$

11) $\int x\arcsin(2x^2)dx$

12) $\int 4x^3 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

13) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)dx$

14) $\int \sin x \cdot \ln(\cos x)dx$

15) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

16) $\int \ln\left(1+2\sqrt{x}\right)dx$

17) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)\ln\left(\sqrt{x}+x\right)dx$

18) $\int \frac{x\ln\left(x^2-3\right)}{x^2-3}dx$

19) $\int \frac{x\ln\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x}}dx$

20) $\int \frac{8\ln^3 x}{x}\arctan\left(\ln^2 x\right)dx$

21) $\int sen(\tan x)e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

22) $\int \frac{y}{\sqrt{y}(1+y)}\arctan\sqrt{y}\,dy$

III. Determina las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

1) $\int \left(x^2+5\right)2^{-x}dx$

2) $\int \frac{3x^2+2x-1}{4e^x}dx$

3) $\int \left(3x^2-x+3\right)\sin(x-2)dx$

4) $\int \left(3x^2-5x\right)\cos(2x)dx$

5) $\int \left(x^2+5x+6\right)\cos 2x dx$

6) $\int \frac{2x^2+9}{e^{-2x}}dx$

7) $\int (4x^2-3x-1)e^{2x-1}dx$

8) $\int (2-2x-x^2)\ \cos(5x+3)\,dx$

9) $\int (3x^2+x+2)\ \sin(2-3x)\ dx$

10) $\int x^3 \ln^2(x)\,dx$

11) $\int 4x^6\, ln^2(4x)\,dx$

12) $\int \frac{7}{\sqrt[7]{x}}\cdot ln^2(2x^2)\,dx$

13) $\int x\arctan^2 x dx$

14) $\int \sin(\ln x)dx$

15) $\int e^{2x}\cos(2x)dx$

16) $\int 3^x senxdx$

17) $\int sen(3x)e^{5x}dx$

18) $\int sec^3(2x-1)dx$

19) $\int 4x^3e^{3x-5}dx$

20) $\int(2x^3-3x)\cos(5x-2)dx$

Semana 3: Sesión 2

Integración de funciones trigonométricas, Integración por sustitución trigonométrica

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante emplea los diversos métodos de integración, incluyendo la sustitución trigonométrica cuando sea pertinente, evaluando cuidadosamente cuál es el más apropiado para resolver los problemas presentados en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Integración de funciones trigonométricas

I. Calcular las siguientes integrales

1) $\int \sin^3 2x\, dx$

2) $\int \cos^5 5x\, dx$

3) $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$

4) $\int \cos^3 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

5) $\int \frac{\cos^3 3x}{\sin^4 3x}\, dx$

6) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$

7) $\int \frac{\sin^5 2x}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx$

8) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x}\, dx$

9) $\int \sin^5 7x \cos^3 7x\, dx$

10) $\int \sin^4 3x\, dx$

11) $\int \cos^6 5x\, dx$

12) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$

II. Calcular las siguientes integrales

1. $\int ctg^5 x dx$
2. $\int \tan^3 x \sqrt{\sec x}\, dx$
3. $\int \frac{\tan^3 2x}{\sec^4 2x} dx$
4. $\int \csc^4 3x dx$
5. $\int \sec^6 4x dx$
6. $\int \tan^2 5x \sec^4 5x dx$
7. $\int \tan^{3/2} 2x \sec^4 2x dx$
8. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x\, dx$
9. $\int \left(4 - \sin \frac{3x}{2}\right)^2 dx$
10. $\int (\cos 3x - \sin 3x)^2\, dx$

III. Calcular las siguientes integrales

1) $\int \sin 2x \cdot \sin 9x\, dx$

2) $\int \sin 2x \cdot \cos 3x\, dx$

3) $\int \cos 5x \cdot \cos 7x\, dx$

4) $\int \sin(3x+6) \cdot \cos(5x+10) dx$

5) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx$

6) $\int \sin(2x)\sin(4x)\cos(3x)dx$

7) $\int \cos 10x \cdot \cos 20x \cdot \cos 30x\, dx$

8) $\int \cos x \cdot \cos^2 5x\, dx$

IV. Calcular las siguientes integrales

1) $\int \frac{\cot^4 x \sec^2 x}{\csc^6 x} + \frac{\tan^3 x}{\sec x} dx$

2) $\int \frac{\cos^2 4x}{\csc^2 4x \sec 4x} - \frac{\cos^4 4x}{\csc^2 4x \sec 4x} dx$

3) $\int \frac{1 + sen^2 x \cos^4 x}{\csc^2 x} \cdot \frac{\cos x}{sen^4 x \cos^5 x} dx$

4) $\int . \sqrt{\frac{sen^3 x}{\cos^{11} x}} + \frac{\cot x - 2\sec x}{\sec x . \csc^2 x} dx$

5) $\int \frac{ctg^3 x + sen^4 x}{1 - \cos^2 x} dx$

6) $\int \left(tgx\sqrt{\sec x} + \frac{\csc x - 2\sec x}{\sec^2 x \csc x} \right) dx$

7) $\int \frac{ctgx.sen2x}{\sec^2 x}\left(\sec^2 x - tg^2 x\right)dx$

8) $\int \frac{sen^3 x \cdot \cos x}{sen^2 x \cdot \sqrt{\cos x} + (\sqrt{\cos x})^5}\,dx$

9) $\int \frac{\left(\sec^2 x - 1\right)ctgx}{\sec x.\csc x}\left(1 - sen^2 x\right)dx$

10) $\int \frac{\csc x.tg^2 x.senx}{\sec^4 x} + \frac{ctg^2 x}{\sec^3 x}\sqrt{tg^3 x.\sec x}\,dx$

Integración por sustitución trigonométrica

I. Encuentra la integral indefinida utilizando la sustitución proporcionada:

1) $\int \frac{5}{(\sqrt{16-x^2})^3}\,dx$, sustitución $x = 4\,\text{sen}\,\theta$

2) $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$, sustitución $x = 4\,\text{sen}\,\theta$

3) $\int x^3\sqrt{x^2 - 25}\,dx$, sustitución $x = 5\sec\theta$

4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 25}}\,dx$, sustitución $x = 5\sec\theta$

5) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$, sustitución $x = \tan\theta$

II. Encuentra la integral indefinida realizando la sustitución trigonométrica adecuada.

1) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$

2) $\int \frac{x^2}{\left(16 - x^2\right)^{5/2}}dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$

4) $\int \frac{1}{x\sqrt{25x^2+16}}dx$

5) $\int \frac{x^2}{\left(1 - 9x^2\right)^{3/2}}dx$

6) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 - x^2}}dx$

7) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}dx$

8) $\int \frac{x^4}{\left(4 - x^2\right)^{7/2}}dx$

9) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx$

10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

11) $\int \frac{e^{-x}}{\left(9e^{-2x}+1\right)^{3/2}}dx$

12) $\int \frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx$

13) $\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

14) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

15) $\int \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}dx$

16) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}dx$

17) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

18) $\int \frac{1}{\left(x^4\right)\sqrt{3+x^2}}dx$

19) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}dx$

20) $\int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}dx$

III. Encuentra la integral indefinida realizando la sustitución trigonométrica adecuada.

1) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$

2) $\int \frac{(2x-3)}{(x^2+2x-3)^{3/2}}dx$

3) $\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

4) $\int \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}dx$

6) $\int \frac{x}{(x^2-2)(x^4-4x^2+5)^{1/2}}dx$

7) $\int \frac{2x^2-4x+4}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

8) $\int \frac{.x^2}{\sqrt{-4x^2-12x-5}}dx$

9) $\int \frac{e^x}{\sqrt{(e^{2x}+8e^x+7)^3}}dx$

10) $\int \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}dx$

11) $\int \frac{x^2-3}{x\sqrt{x^4-4}}dx$

12) $\int \frac{2x^2-5}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

13) $\int \frac{x}{\left(\sqrt{x^2-4x+8}\right)^5}dx$

14) $\int \frac{729}{(x+2)^6\sqrt{x^2+4x+13}}dx$

15) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{15-x^2+2x}}dx$

Semana 4: Sesión 2

Integración mediante fracciones parciales

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 1

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante interpreta los diferentes métodos de integración, evaluando cuidadosamente cuál es el más adecuado para cada problema presentado en la Guía de Trabajo, con la finalidad de resolverlos de manera efectiva y precisa.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Integración por fracciones parciales:

I. Calcular las siguientes integrales

1) $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}dx$

2) $\int \frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}dx$

3) $\int \frac{x^2-x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx$

4) $\int \frac{x+2}{x^4+2x^3+x^2}dx$

5) $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}dx$

6) $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3-4x}dx$

7) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$

8) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$

9) $\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}dx$

10) $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx$

11) $\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+1)(x-1)}dx$

12) $\int \frac{x^5}{x^3-1}dx$

13) $\int \frac{x^2}{x^4-5x^2+4}dx$

14) $\int \frac{1}{x^3+3x^2}dx$

15) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1}dx$

16) $\int \frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4}dx$

17) $\int \frac{1}{x^2(x+1)^2}dx$

18) $\int \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$

19) $\int \frac{1}{x^4-x^2}dx$

20) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$

21) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$

22) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

23) $\int \frac{x^4-4x^2-14x}{x^2-2x-8}$

24) $\int \frac{1}{x-x^{4/3}}dx$

25) $\int \frac{(2+e^x)e^x}{2e^{2x}-3e^x+1}dx$

26) $\int \frac{1}{(x+1)^{1/4}-(x+1)^{5/4}}dx$

II. Calcular las siguientes integrales

1) $\int \frac{(sen^2x+2senx-2)\cos x}{sen^3x-3sen^2x+4senx-12}dx$

2) $\int \frac{-3x^3+5x^2+7x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx$

3) $\int \frac{\sec x \, tg\, x}{(sec^2x+1)(sec^2x+2)}dx$

4) $\int \frac{tg^3 x+tg^2 x+2\, tg\, x+1}{tg^4 x+3\, tg^2 x+2} sec^2 x\, dx$

5) $\int \frac{cos^2 x\, sen\, x+2senx}{(2\cos^2 x-\cos x-1)(cos^2 x+1)}dx$

6) $\int \frac{sec^2 x}{tan^2 x+3\tan x+2}dx$

7) $\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}+4e^x-5}dx$

8) $\int \frac{-x^4+4x^2+15}{x^3-2x^2+x-2}dx$

9) $\int \frac{cos^2 x\, sen\, x+2senx}{(\cos x-1)(cos^2 x+1)}dx$

10) $I=\int \frac{-2x^2+5x+3}{(x+1)(x^2+2x+5)}dx$

11) $I=\int \frac{\sin^2(x)+3\sin(x)+6}{\sin^3(x)+3\sin(x)}.\cos(x)\,dx$

12) $I=\int \frac{e^x+5}{(e^x-1)(e^{2x}+2)}e^x dx$

Segunda

Unidad

Integrales definidas

Semana 5: Sesión 2

La integral definida: teorema fundamental del cálculo

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica conceptos y técnicas relacionadas con la integral definida

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Teorema fundamental del cálculo

Calcula $F'(x)$ de las siguientes funciones (Use el primer teorema fundamental del cálculo)

1) $F(x) = \int_x^5 \sqrt{1+t^4}\, dt$
2) $F(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+sen^2 t}\, dt$
3) $F(x) = \int_2^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$
4) $F(x) = \int_x^{x^2} \ln^2 t\, dt$
5) $F(x) = \int_0^{tg\, x} \frac{1}{1-tg^2 t}\, dt$

Integración directa

Calcule las siguientes integrales definidas:

1) $\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\, dx$

2) $\int_{-1}^{0} (t^{1/3} - t^{2/3})\, dt$

3) $\int_{1}^{4}(3-|x-3|)dx$

4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2t+\cos t)\,dt$

5) $\int_{-1}^{3}\left(5-\frac{1}{4}x^3\right)dx$

6) $\int_{0}^{2}|x^2-1|\,dx$

7) $\int_{1}^{64}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

8) $\int_{0}^{\pi/3}(1+\cos x\,\mathrm{tg}\,x)\,dx$

9) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen^3(x)dx$

10) $\int_{0}^{1}(sen^2x.cos^2x)\,dx$

Semana 6: Sesión 2

Métodos de integración para integrales definidas: cambio de variable, integración por partes

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: ....Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica los métodos de integración, incluyendo el cambio de variable y la integración por partes, para resolver integrales definidas, utilizándolos en la solución de problemas específicos presentes en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Integración por cambio de variable

Calcule las siguientes integrales definidas:

1) $\int_{-2}^{0} 3x\sqrt{4-x^2}dx$

2) $\int_{-1}^{3}(x+1)^3\,dx$

3) $\int_{0}^{1}\frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+4}}\,dx$

4) $\int_{0}^{\pi}\frac{x\,sen\,x}{1+cos^2x}dx$

5) $\int_{0}^{4}\frac{dx}{7x+1}$

6) $\int_{0}^{1} x^3(2x^4+1)^2dx$

7) $\int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$

8) $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

9) $\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}dx$

10) $\int_1^3 \left(\dfrac{e^{3/x}}{x^2} + 3^{x/4} \right) dx$

11) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \dfrac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

12) $\int_0^2 \dfrac{x^5}{(1+x^3)^{3/2}} dx$

13) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{senx.\cos^3 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$

14) $\int_2^4 \left(\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}+e^x} + \dfrac{1}{x(\sqrt{\ln x}+\ln x)} \right) dx$

15) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx + \int_1^e \dfrac{1}{x\left[1+(\ln x)^2\right]} dx$

Integración por partes

Calcule las siguientes integrales definidas:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} sen(4x) dx$

2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(3\ arc\ sen\ x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3) $\int_1^3 \frac{ln(x+1)}{x+1} dx$

4) $\int_0^3 arc\ sen\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) dx$

5) $\int_0^1 6z.\arctan(z)\, dz$

6) $\int_0^2 x^2 e^{-2x}\, dx$

7) $\int_0^1 e^x senx\, dx$

8) $\int_0^1 \ln(4+x^2)\, dx$

9) $\int_0^{\pi/8} x\sec^2 2x\, dx$

10) $\int_1^3 \dfrac{x^3}{\sqrt{2x^2+7}} dx$

11) $\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\, dx + \int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \cos\sqrt{2x}\, dx$

12) $\int_0^1 x\, arc\, sen\, x^2\, dx + \int_2^4 x\, arc\sec x\, dx$

13) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \dfrac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx + \int_0^{\pi/3} senx \ln(1+senx)\, dx$

Semana 7: Sesión 2

Métodos de integración para integrales definidas: integración por sustitución trigonométricas

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante será capaz de aplicar métodos de integración específicos para resolver integrales definidas de funciones trigonométricas, incluyendo la integración por sustitución trigonométrica, empleándolos en la solución de problemas específicos presentes en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Integración por sustitución trigonométrica

Calcule las siguientes integrales definidas:

1) $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

2) $\int_{0}^{2} \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\, dx$

3) $\int_{0}^{\sqrt{8}} \frac{x^3\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}\, dx$

4) $\int_{1}^{\sqrt{24}} \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\, dx$

5) $\int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{32}} \frac{4}{x\sqrt{x^2-16}} dx$

6) $\int_{0}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}} dx$

7) $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{36-x^2}}{x^2} dx$

8) $\int_{0}^{\pi/3} \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx$

9) $\int_{0}^{1} \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+4}}\, dx$

10) $\int_{-4}^{-2} \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x-5}} dx$

Semana 8: Sesión 2

Métodos de integración para integrales definidas: integración mediante fracciones parciales

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 2

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante será capaz de interpretar el método de integración mediante fracciones parciales para resolver integrales definidas, empleándolo en la solución de problemas específicos presentes en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Integración mediante fracciones parciales

Calcule las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^4 \frac{11x+3}{x(2x+1)}dx$

2) $\int_0^1 \frac{3.e^x}{e^{2x}+4e^x+3}dx$

3) $\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+x}dx$

4) $\int_{-1}^2 \frac{3x^2-2x+1}{x(x+2)^2}dx$

5) $\int_1^4 \frac{x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+1)}dx$

6) $\int_2^4 \frac{4x^3+3x+2}{x^2(x+2)}dx$

7) $\int_1^3 \frac{x^4+3x-1}{(x^2+9)x^{2dx}}$

8) $\int_0^2 \frac{x^2+2x}{(x+1)^2(x^2+4)}dx$

Tercera Unidad

Aplicaciones de la integral definida

Semana 9: Sesión 2

Cálculo de áreas de regiones planas

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce las propiedades y fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas tanto en coordenadas rectangulares como en coordenadas polares, aplicándolas en la resolución de problemas presentes en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Área de una región plana en coordenadas rectangulares

I. Determina el área de la región delimitada por:

1) $y = x^2 - x^4$, $y = x^2 - 1$
2) $y = 2x - x^2$, $y = -3$
3) $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$
4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi/2$
5) $x^2 + y^2 \leq 25$, $3y^2 \leq 16x$, $x \geq 0$
6) $x = \sqrt{y-1}$, $x = y+2$, $x = 0$, $x = 5$
7. R: $5x - y + 4 \geq 0$, $x + 4y - 16 \leq 0$, $x \leq y^3$
8) $y = x^2$, $y = 6x - x^2$.
9) $y^2 = 1 - x$, $2y = x + 2$.
10) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 3$, $y + x = -1$.

II. Encuentra el área de la región definida por las gráficas de:

1) $y = x^2 - 2x, \ \ y = 4x - x^2.$

2) $y = x^2 - 8x + 17, \ y = -x^2 + 6x - 3$

3) $x = 3y^2, \ \ y = 2x^2 + 1, \ \ x + y = 4, \ \ x \geq 0.$

4) $y = 2x - x^2, \ \ y = -2x + 4, \ \ y = 2x.$

5) $3y^2 - 4x - 6y = 5; \ \ y^2 = -9x + 18, \ -4x + 3y = -8$

6) $y = x^2, \ \ y = x^2 + 4, \ \ y = 12 - x^2, \ \ y = 6 - x^2.$

7) $x = \sqrt{y+3}, \ \ y = -2x, \ \ y = x + 3.$

8) $x = 2\sqrt{y}, \ \ \sqrt{3}\, x = \sqrt{y}, \ y = 2x + 5$

9) $x = \sqrt{\frac{12}{y} - 3}, \ x = \sqrt{9y} \ , \ x = \frac{y}{3}$

10) $y = 2\sqrt{x-1}, \ x + y = 4, \ \ y = \sqrt{x-2}, \ y = 0$

11) $x = \sqrt{\frac{12}{y} - 3}, \ x = \sqrt{9y} \ , \ x = \frac{y}{3}$

12) $y = x^3 + 2, \ \ y = x - 2, \ \ x = 0, \ \ x = 2.$

13) $y = x^3, \ \ y = \frac{x^3}{8}, \ \ y = 8.$

14) $y = \frac{x^3}{8}, \ \ x = y - 4, \ \ x = 2.$

15) $2y = 7 + 2x - 3x^2, \ \ y = x^3 + 2.$

16) $y^2 = 2(x-1), \ \ 3y - 3 = x, \ \ y = -(x-1)^3$

17) $2y - x^3 = 0, \ \ 2y - x^2 = 4, \ \ 2y + 3x = 4.$

18) $y = 2x - 7, \ y = \frac{-x^3}{2} + 1, \ \ 2y = 2 + 4x - x^2$

19) $(x-3)^2 = (y-2) \ \ ; \ y = \sqrt{x+1} \ ; \ x = 0$

20) $y = \frac{3}{x} \ ; \ y = 1 - \sqrt{12 - 4x} \ ; \ y = 3x$

21) $y = -3x + 3, \ \ \ y = -\sqrt{-3x + 12} + 3, \ \ \ y = 0$

22) $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{x}} + 1; \ \ \ \mathrm{y} = -x^3 + 1; \ \ \ y = x - 1$

23) $y - 1 = x, \ \ y - 1 = \frac{-x^3}{4}, \ \ y = 2 + \sqrt{\frac{1-x}{3}}$

Semana 10: Sesión 2

Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

Sección: .... Fecha: .../.../...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica las propiedades y fórmulas para calcular el volumen de un sólido de revolución utilizando los métodos de discos, arandelas y capas cilíndricas, para la solución de los ejercicios presentes en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

I. Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región R alrededor del eje indicado:

1) $y = \sqrt{2x-3}, x = 9,\ eje\ \ x.$ Alrededor del eje x
2) $y = x^2,\ y = 4 - x^2;$ eje $y = 0$
3) $4y = 13 - x^2,\ 2y = x + 5;$ eje x
4) $y = x^3,\ x^2 + y = 0;$ eje $y = 0$
5) $x + y = 7,\ xy = 6;$ alrededor del eje x
6) $y = e^x, y = 3, x = 0.\ Alrededor\ \ del\ \ eje\ y$
7) $y = 4 - x^2,\ y = 2;$ eje $y = 2$
8) $y = \cos x,\ \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 4\pi;$ eje y

II. Calcula el volumen del sólido de revolución, que se genera al girar la región D alrededor del eje Y. Sea D la región limitada por las gráficas de:

1) $y = -3x^3 + 1,\quad y - 1 = \sqrt{x},\quad x + 5y = 19$

2) $(x-2)^2=-4(y-4)$; $y=1+\sqrt{\dfrac{4x-4}{3}}$; 2x+y=3

3) $(y-1)^2=-4(x-3)$; $y=2+\sqrt{x-1}$; $3x+y=5$

4) $y=-\sqrt{x}+2$, $y=x^3+2$, $x+y=4$

5) $x-y=1$; $(x-1)^2=2-y$; $y=2+\sqrt{x-1}$

6) $3x+5y=21$; $y-2=(x-1)^3$; $x=1+\sqrt{\dfrac{2-y}{2}}$ y $y=0$

7) $y+2x=4$; $y=4-2(x-2)^2$; $y=2(x-2)^3$, $x\geq 2$

8) $y-1=\sqrt{8-2x}$, $2x=12-(y-3)^2$, $y=x+1$

9) $y=5x-5$; $y=5-(x-2)^2$; $y=-(x-2)^3$

10) $3x+5y=18$; $y=2+x^3$; $y-2=-2x^2$; $y=0$

11) Limitada superiormente por $x-2y=-1$ e inferiormente por

$y=-(x-2)^3$; $y=-1+\sqrt{8x-24}$

III. Calcula el volumen del sólido de revolución, que se genera al girar la región D alrededor del eje X . Sea D la región limitada por las gráficas de:

1) $y=\sqrt{1-x}$; $x=\sqrt{3y}+1$; $x-2y+2=0$,

2) $y=\sqrt{x}+1$; $y=1-x^2$; $y=x-1$,

3) $y=3-\sqrt{x}$; $y=x^3+3$; $x+y=5$,

4) $y=\sqrt{1-x}$, $x=\sqrt{3y}+1$, $x-2y+2=0$

5) $P_1:$ $(y-2)^2=x-1$, $P_2:$ $y=1+\sqrt{2-x}$, $L:$ $x=y+1$

6) $y=-(x-1)^3$, $y=5-(x-2)^2$, $5x-y=5$

7) $4x-4=(y-2)^3$, $y=-\sqrt{x-1}+2$, $2x+y=10$

8) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{3}}$; $x=y^2$; $y=-\dfrac{x}{5}$

9) $y-1=x$, $y-1=\dfrac{-x^3}{4}$, $y=2+\sqrt{\dfrac{1-x}{3}}$, ubicada en el primer y segundo cuadrante.

10) $y=2\sqrt{x-1}$, $x+y=4$, $y=\sqrt{x-2}$, $y=0$

Semana 11: Sesión 2

Longitud de arco

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica las propiedades y fórmulas de la longitud de arco, áreas de superficies de revolución y centros de masa para la solución de los ejercicios presentes en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Longitud de arco

Encuentre la longitud del arco de la curva en el intervalo dado.

1. $f(x) = \frac{1}{6}(4x^2 + 2)^{3/2}$, $[1,3]$
2. $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $[0,1]$
3. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $[0,1]$
4. $y = \sqrt{x}$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$
5. $y = \ln(1 - x^2)$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$
6. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{ln\, x}{4}$, $[1, e]$
7. $y = e^x$, $[0,1]$
8. $y = \frac{1}{8}\left(x^4 + \frac{2}{x^2}\right)$, $[1,2]$
9. $y = a\, cosh\left(\frac{x}{a}\right)$,$[0, b]$
10. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y - 3)$, $1 \leq y \leq 9$

11. $f(x) = \int_0^x \sqrt{cos\, t}\, dt$, $[0, \pi]$

12. $y = a\, ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$, $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{2}\right]$, donde $a > 0$

13. $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $[1,3]$

14. $y = \sqrt{e^{2x} - 1} - sec^{-1}(e^x) - 1$, $[0,4]$

15. $f(x) = ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$, $[1,2]$

16. $y = \frac{1}{4} arcsin\, x - \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2}$, $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

17. $y = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2}$, $[3,5]$

18. $x = \frac{y^3}{6} - \frac{1}{2y}$, para $2 \le y \le 5$

19. $x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, para $1 \le y \le e$.

20. $x = \ln(\sec y)$, para $0 \le y \le \frac{\pi}{3}$.

Semana 12: Sesión 2

Centro de masa. Integrales impropias

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 3

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

- Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
- Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica las propiedades y fórmulas de las integrales impropias para la solución de los ejercicios presentes en la Guía de Trabajo.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Centro de masa

1) Encuentra el centro de masa de la región delimitada por la función cúbica $y = x^3$ y la línea $y = x$ para $0 \leq x \leq 1$.

2) Halla el centro de masa de la región delimitada por $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$..

3) Encuentra el centro de masa de la región dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y fuera de la parábola $y = x^2$.

4) Halla el centro de masa de la región delimitada por $y = x^3$ y $y = x^2 + 1$ para $-1 \leq x \leq 1$.

5) Determina el centro de masa de la región delimitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante.

6) Encuentra el centro de masa de la región delimitada por la parábola $y = (x - 1)^2 + 1$ y la recta $y = -x + 4$.

7) Encuentra el centro de masa de la región delimitada por la parábola $x = y^2 - 2$ y la recta $x = 2y + 1$.

8) Encuentra el centro de masa de la región delimitada por la función $y = \sqrt{x-1}$ y la parábola $y = -x^2 + 3x - 2$.

9) Encuentra el centro de masa de la región delimitada por las siguientes curvas: $y = -x^2 + 4x$, $y = x$, $y = 4$.

10) Encuentra el centro de masa de la región delimitada por la función cúbica $y = x^3 + 2$ y las rectas $y = 2x - 1$, $y = -x + 3$.

Integrales impropias

I. Establezca si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes: **Caso** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

1) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{x}+3)^{3/2}} dx$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

3) $\int_5^{+\infty} \frac{x+18}{x^2 + x - 12} dx$

4) $\int_0^{+\infty} e^{-x} senx dx$

5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^{2x} - 1}}{e^{3x}} dx$

6) $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4} dx$

7) $\int_3^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} dx$

8) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2e^x + 1} dx$

9) $\int_1^{+\infty} \frac{arctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}^3} dx$

10) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$

11) $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)^5} dx$

14) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

15) $\int_0^{+\infty} 3x \cdot e^{-3x} dx$

16) $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$

II. Establezca si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes: **Caso** $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

1) $\int_{-\infty}^{0} xe^{-4x}dx$

2) $\int_{-\infty}^{0} x^2e^x dx$

3) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}dx$

4) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

5) $\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan x}{x^2+1}dx$

6) $\int_{-\infty}^{\ln 9} \frac{\left(e^{2x}\right)^2}{\sqrt{9-e^x}}dx$

7) $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx$

8) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3.\sqrt{x^2-1}}dx$

III. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias: **Caso** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2x^2-x+3\right)dx$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}dx$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^3}dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2}dx$

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx,$

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1-x)e^{-x}\,dx$

10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^{x}}\,dx$

IV. Establezca si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes: **Caso** $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx,\quad f(x)$ discontinua en el intervalo $[a,b]$

1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{senx.\cos x}\right)dx$

2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3 - 5x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{2x\ln\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx,$

6) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{2x\ln\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,dx$

7) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$

8) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$

9) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x^2}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx$

10) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

11) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}}}\,dx$

12) $\displaystyle\int_{0}^{6} \frac{2x}{\left(x^4-4\right)^{\frac{2}{3}}}\,dx,$

13) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}\,dx$

14) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{11x+3}{x(2x+1)}\,dx$

Cuarta Unidad

Integrales múltiples

Semana 13: Sesión 2

Integrales Dobles: Integrales dobles iteradas. Integrales dobles en coordenadas polares

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 4

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.

Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema.

Aplica los conceptos correctos de cálculo integral. Consulta recursos adicionales si lo necesitas.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas aplicando integrales dobles en distintas situaciones geométricas, manejando los cambios de coordenadas entre rectangulares y polares correctamente.

II. Descripción de la actividad por realizar

Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.

Integrales dobles iteradas.

Cálculo de integrales dobles en rectángulos.

Encuentra la integral doble de la función sobre el rectángulo especificado.

1) $f(x,y) = xe^{x^2+2y}$, $Q = [0,1] \times [-1,1]$

2) $f(x,y) = e^{x+seny}\cos y$, $Q = [0,1]x[0,\pi/2]$

3) $f(x,y) = e^{x}\cos(y+e^{x})$, $Q = [0,2] \times [0,1]$

4) $f(x,y) = x\cos(xy+1)$, $Q = [0,1] \times [-1,0]$

5) $f(x,y)=x^2ye^{xy}$, $Q=[0,1]x[0,2]$

6) $f(x,y)=\dfrac{\ln y}{y\sqrt{x(4-x)}}$, $Q=[2,4]x[1,\ e]$

7) $f(x,y)=x\sec^2(x^2+y)$, $Q=[1,\ 2]x[0,1]$

8) $f(x,y)=\dfrac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$, $Q=[-1,0]x[0,\ 1]$

9) $f(x,y)=\sqrt{x(y+2)}\ln x$, $Q=[-1,2]\times[1,4]$

10) $f(x,y)=\dfrac{xy}{(x+1)(x-3)}$, $Q=[0,1]x[0,2]$

Integrales dobles en regiones generales.

1) Evalúa la integral $\iint_R \left(x^2+y^2\right)dA$, donde *R* está limitada por las curvas $y=x,\ y=x^2$

2) Determina la integral $\iint_R (x+2y)dA$, donde *R* está delimitada por las curvas $y=1+x^2,\ y=2x^2$

3) Calcula la integral $\iint_R xydA$, donde *R* está delimitada por las curvas $y=x-1,\ y^2=2x+6$

4) Evalúa la integral $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{y^2-2y-3}dA$, donde R está acotada por las curvas $x=y^2$, $2y+3=x$

5) Determina la integral $\displaystyle\iint_R \sqrt{x+y}dA$, donde R está delimitada por las curvas $y=x$, $y=-x$, $x=1$

6) Calcula la integral $\iint_R \frac{x^3}{y^2} dA$, donde R está restringida por las curvas:

$x = 2$, $y = x$ y $xy = 1$

7) Evalúa la integral $\iint_R (x + y) dA$, donde R está restringida por las curvas: $y = 2x + 1$ y $y = x^2 + 1$

8) Determina la integral $\iint_R (y \ln x) dA$, donde R está limitada por: $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$

9) Calcula la integral $\iint_R (xy + y) dA$, donde R está limitada por $y = x^3$, $x = y^2$.

10) Evalúa la integral $\iint_R (x + y + 1) dA$, donde

$$R = \left\{ (x, y) \ / \ y \geq x^2 + 2x \ \wedge \ y \leq 3 \ \wedge \ y \leq 3x + 6 \right\}$$

11) Determina la integral $\iint_R \frac{y}{x^2 + y^2} dA$, donde

$$R = \left\{ (x, y) \in R^2 \ / \ 1 \leq x \leq 2, \ x \leq y \leq 2x \right\}$$

12) Calcula la integral $\iint_R x dA$, donde R está restringida por las curvas:

$y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0$, $y = 0$ (IC).

13) Evalúa la integral $\iint_R e^{x+2y} dA$, donde R es la región limitada por

$|x| + |y| = 1$

14) Calcula la integral $\iint_R \frac{1}{x + 6} dA$, donde R está restringida por las curvas: $y = 6 - 2x$; $y = \frac{x^2}{2}$; $y = 4x^2$ (IC).

15) Determina la integral $\iint_R (y+1)dA$, R es la región (IC), limitada por:

$$y^2 = 8x, y^2 = \frac{4}{5}x, y^2 = -4x + 24$$

Cambio en el orden de integración.

Para las siguientes integrales, modificar el orden de integración y determina el valor de la integral resultante:

1) $\int_0^2 \int_{x^2}^4 \sqrt{y} \cos y dydx$

2) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 sen(y^3) dydx$

3) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y} seny \cos \frac{x}{y} dydx$

4) $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 sen(x^3) dxdy$

5) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{y}} dydx$

6) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dxdy$

7) $\int_0^{\pi/2} \int_0^x \frac{senx}{4 - sen^2 y} dydx$

8) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-y^2} dydx$

9) $\int_0^1 \int_x^1 (x^2)\sqrt{1+y^4} dydx$

10) $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} \frac{2ye^{3x}}{x} dxdy$

Integrales dobles en coordenadas polares.

Determina el valor de la integral doble en la región indicada:

1) Evalúa la integral $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA,$ donde $D : x^2 + y^2 \le 4.$

2) Calcula la integral doble de la función $f(x, y) = ln(3x^2 + 3y^2 + 3)$ sobre la región limitado por las circunferencias $2 \le 2x^2 + 2y^2 \le 8.$

3) Determina la integral $\iint_D \frac{x^2 y^2 \, dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, donde D es el anillo

$9 \leq x^2 + y^2 \leq 25.$

4) Evalúa la integral $\iint_D \exp\left(x^2+y^2\right) dA,$ donde

$D = \left\{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\right\}$

5) Calcula la integral $\iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2} dxdy, \quad D: x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

6) Determina la integral $\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dydx,\ D: x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0.$

7) Evalúa la integral $\iint_D \sqrt{x^2+y^2+16}\, dA$, donde D es dada por el disco

$x^2 + y^2 \leq 9$ a la derecha del eje Y.

8) Calcula la integral $\iint_D \sin\left(x^2+y^2+2\right) dxdy,$ donde

$D = \left\{(x,y) / x^2+y^2 \leq 25,\ y \geq 0,\ y \geq x\right\}$

9) Determina la integral $\iint_D \frac{4}{\cos^2\left(x^2+y^2\right)} dxdy,$ donde

$D: x^2 + y^2 \leq 16, \quad y \geq \sqrt{3}\, x.$ Primer cuadrante.

10) Evalúa la integral $\iint_D \sin\left[2(x+y)^2 - 4xy\right] dxdy,$ donde

$D: y = \sqrt{9-x^2},\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ y = -x$

11) Calcula la integral doble de la función $f(x,y)=\frac{8}{\sqrt{4x^2+4y^2}}$ sobre la región $D: 3x^2+3y^2 \leq 27y$.

12) Determina la integral $\iint_D \frac{y\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$, donde D es la región delimitada por la circunferencia $2x^2+2y^2 \leq 32x$.

13) Evalúa la integral doble de la función $f(x,y)=3\sqrt{4x^2+4y^2}$ sobre la región: $D: x^2+y^2-2y \geq 0,\ x^2+y^2-4y \leq 0,\ y \geq x,\ y \geq -\sqrt{3}x.$

14) Calcula la integral $\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{4(x-y)^2+8xy}}\,dxdy$, donde

$D: x^2+y^2-4y \geq 0,\ x^2+y^2-8y \leq 0,\ y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x.$ 15

15) Determina la integral $\iint_D \frac{9x^2}{\sqrt{9(x+y)^2-18xy}}\,dA$, donde D es la región delimitada por las circunferencias $2x^2+2y^2 \geq -8y$, $3x^2+3y^2 \leq -24y$ y las gráficas $x \leq 0$, $y \leq x$.

Semana 14: Sesión 2

Aplicaciones de la integral doble: área y volumen

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 4

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones

Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.

Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema. Aplica los conceptos correctos de cálculo integral. Consulta recursos adicionales si lo necesitas.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas utilizando integrales, calculando áreas y volúmenes en diversas situaciones geométricas. correctamente.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.
2. Grafica la región en el plano delimitada por las curvas.
3. Trace la gráfica del sólido limitado por las superficies dadas.
4. Establece los límites de integración para las variables según la región graficada.
5. Evalúa la integral doble de una función sobre la región de integración para obtener el área o el volumen.

Calculo de áreas por integrales dobles

1) Determina el área de la región delimitada por las curvas especificadas:

a) $y = x^2,\ y = x + 6$

b) $y=\frac{1}{2}(x+1), y=3, y=1, x=7.$

c) $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x=4.$

d) $x^2=4y,\ y^2=4x,\ x+y=3,\ y=3.$

2) Encuentra el área encerrada por las curvas: $x^2 \geq \frac{9}{4}y$; $x^2+y^2 \leq 25$

3) Encuentra el área encerrada por las curvas: $x^2-2y^2 \leq 1$; $x^2+y^2 \leq 4.$

4) Encuentra el área encerrada por las curvas: $y=2\sqrt{x-1}$, $x+y=4$, $y=\sqrt{x-2}$, $y=0$

5) Encuentra el área encerrada por las curvas:

$$y=-(x-1)^3, \quad y=5-(x-2)^2, \quad 5x-y=5$$

6) Calcula el área que está restringida por las gráficas:

$x^2+y^2=1, x^2+y^2=3, y=x, y=\sqrt{3}x.$ (tercer cuadrante).

7) Halla el área que está restringida por las gráficas:

$$x^2+y^2 \geq 8,\ x^2+y^2 \leq 4y,\ y \geq -\sqrt{3}x$$

8) Determina el área que está restringida por las gráficas:

$$x^2+y^2-6x \geq 0, \quad x^2+y^2-12x \leq 0, \quad y \geq 0, \quad y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

9) Halla el área que está restringida por las gráficas:

$$D: x^2+y^2-4y \leq 0,\ x^2+y^2-2y \geq 0, y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x,\ y \leq x$$

10) Calcula el área que está restringida por las gráficas:

$$x^2+6x+y^2 \geq 0,\ x^2+12x+y^2 \leq 0,\ y \geq 0,\ y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Calculo de volúmenes por integrales dobles.

1) Determina el volumen del sólido limitado por las superficies definidas por las siguientes ecuaciones: $z=x^2+y^2,\ z=1$

2) Encuentra el volumen del sólido delimitado por el paraboloide $x=y^2+z^2$ y el plano $x=y+z$.

3) Calcule el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones: $y = x^2 + z^2$, $y = 8 - x^2 - z^2$.

4) Encuentra el volumen del sólido S que está acotado por el paraboloide $4z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = 2y$

5) Calcula el volumen del sólido S que está delimitado por el paraboloide $z = 3 - x^2 - y^2$ y el plano $z = -4y + 3$.

6) Dado el sólido Ω, que está contenido dentro del cilindro $(y-4)^2 + z^2 \leq 16$, el plano $x = y + 4$ y el plano YZ, calcula el volumen de este sólido.

7) Calcula el volumen del sólido en el primer octante que se encuentra por debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

8) Encontrar el volumen de la región situada sobre el disco $2x^2 + 2(z-1)^2 \leq 2$ y acotada por arriba de la función $3y = 3x^2 + 3z^2$.

9) Encuentra el volumen del sólido limitado por las dos superficies $x = y^2 + z^2$ y $x = 2y^2 + 2z^2 - 1$.

10) Encuentra el volumen del sólido que está limitado por encima por el paraboloide $2y^2 + 4z^2 = 4 - x$ y por debajo por el paraboloide $2y^2 + 4z^2 = 4 + 4x$.

11) Encuentra el volumen del sólido que está delimitado en la parte superior por una superficie esférica $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$, en la parte inferior por el plano XY y en los lados por un cilindro $3x^2 + 3y^2 = 3$.

12) Calcula el volumen del sólido limitado por las superficies definidas por las siguientes ecuaciones: $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 12$, $2x^2 + 2(z-1)^2 = 2$, $y = 0$.

13) Calcula el volumen del sólido que se encuentra dentro de la esfera $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 8z$ y por encima del paraboloide $3z = 3x^2 + 3y^2$.

14) Calcula el volumen del sólido que está limitado por las superficies de las esferas dadas por las ecuaciones: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 16$, $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \leq 12x$.

15) Determina el volumen del sólido que está delimitado por las superficies descritas por las siguientes ecuaciones:

a) $z = 4 - y^2,\ y + z = 2,\ x = 0,\ x = 2$

b) $z = x^2 + 4,\ \ y = 4 - x^2,\ \ x + y = 2,\ z = 0$

c) $x + z^2 = 1,\ x = y,\ x = y^2$

d) $x = y^2\ \ x = z,\ z = 0,\ x = 1.$

e) $z = 6,\quad z = 2y,\quad y = x^2$ e $y = 2 - x^2$

f) $z = 9 - x^2$, $x = 3 - y^2$, $y = 0$, $x = 0$

Semana 15: Sesión 2

Integrales Triples: Integrales triples iteradas. Aplicaciones de la integral triple

Sección: .... Fecha: …/…/...... Duración: 60 minutos

Docente: .... Unidad: 4

Nombres y apellidos: ....

Instrucciones
Lee cuidadosamente cada problema y comprende lo que se te pide.
Organiza tu trabajo y elige la estrategia adecuada para cada problema. Aplica los conceptos correctos de cálculo integral. Consulta recursos adicionales si lo necesitas.

I. Propósito

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve problemas aplicando los teoremas fundamentales asociados a las integrales triples, utilizando integrales triples para calcular el volumen de sólidos en diversas situaciones geométricas tridimensionales, identificando la región de integración y los límites para cada variable de forma correcta.

II. Descripción de la actividad por realizar

1. Resuelve los ejercicios planteados tomando en cuenta la teoría aprendida.
2. Representa el sólido y la región definida por las superficies proporcionadas.
3. Transforma las superficies y la función a coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas si esto simplifica la integración.
4. Determina los límites para cada variable en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas, según el sistema de coordenadas utilizado.
5. Realiza el cálculo de la integral triple integrando en el orden correcto.

Integrales triples iteradas.

Integrales triples sobre cajas rectangulares

Calcula las siguientes integrales triples sobre la región indicada:

1) $\iiint_B ze^{x+y}dV$, $B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

2) $\iiint_B (1+x)ye^z dV$, $B = [1,2] \times [1,2] \times [1,2]$

3) $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)dV$, $B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

4) $\iiint_B \frac{1}{xyz} dV$, $B = [1,e] \times [1,e] \times [1,e]$

5) $\iiint_B (xcosy + z)dV$, $B = [0,1] \times [0,\pi] \times [-1,1]$

6) $\iiint_B (x^2 + lny + z)dV$, $B = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$

7) $\iiint_B zxy\sqrt{1+y^2}dV$, $B = [-1,2] \times [0,1] \times [0,1]$

8) $\iiint_B \frac{z^2y - zx^2 - zx^4}{1+x^2} dV$, $B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

9) $\iiint_B xz \cdot sin^3(y)dV$, $B = [1,2] \times [0,\pi/2] \times [1,3]$

10) $\iiint_B xz \cdot e^{yz}dV$, $B = [-1,1] \times [0,2] \times [1,2]$

11) $\iiint_B xyz \cdot e^{x^2y}dV$, $B = [-1,1] \times [1,2] \times [2,3]$

12) $\iiint_B \frac{xy^2 - xy}{yz(x-3)(x+2)} dV$, $B = [-1,1] \times [1,2] \times [1,3]$

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

1) Calcula la integral triple de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 3$, el plano $z = 0$ y el plano $z = 4 - x - y$.

2) Encuentra la integral triple de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la región limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ y el plano $y = 3$.

3) Calcula la integral triple de $f(x, y, z) = e^x$ sobre la región limitada por el plano $x = 0$, el plano $x = 2$, el cilindro $y^2 + z^2 = 9$, y el plano $z = y$.

4) Calcula el valor de la integral $\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2)dV$, donde Ω es la región acotada por las gráficas de: $x^2 + y^2 \leq 4$, $-2 \leq z \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5) Calcula la integral triple de la función $f(x, y, z) = ln(y^2 + z^2 + 4)$ sobre la región Ω limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y por los planos $0 \leq z \leq 3$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.

6) Evalúa la integral triple $\iiint_R e^x \sqrt{y^2 + z^2}\ dV$, donde R: $x = 1$, $x = 2$, $y^2 + z^2 = 1$

7) Halla el valor de la integral $\iiint_R \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV$, donde R : $y = 0$, $y = 1$, $x^2 + z^2 = 4$, $x^2 + z^2 = 9$

8) Considera el sólido S definido por las superficies $x^2 + y^2 = -z + 4$; $x^2 + (y-2)^2 = z$. Dibuja la gráfica del sólido S y la región D. Luego, calcula la integral triple de la función $f(x, y, z) = \frac{4x}{2x^2+2y^2}$ sobre el sólido S.

9) Calcula la integral de la función $f(x, y, z) = 2xy$ sobre el sólido Ω acotado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $x + y = 0$, $z = 2$.

10) Considera el sólido S delimitado por las superficies descritas por las ecuaciones: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Dibuja la gráfica del

sólido S y de la región D. Luego, evalúa la integral triple $\iiint \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dz\, dy$ sobre el sólido S.

Integrales triples en coordenadas esféricas

1) Calcula la integral triple de la función $f(x,y,z)=z$ sobre la región dentro del cono $z^2=x^2+y^2$ desde $z=0$ hasta $z=5$.

2) Halle el valor de la integral $\iiint_{\Omega} dxdydz$, donde Ω es el sólido restringido por la semiesfera $x^2+y^2+z^2=16,\ z\geq 0$ y el cono $z^2=x^2+y^2$.

3) Dado el sólido Ω que está contenido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=6y$ y afuera del cono $3y^2=x^2+z^2$, elabore el gráfico del sólido. Exprese la integral $I=\iiint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}dV$ usando coordenadas esféricas y determine su valor.

4) Halla el valor de la integral $\iiint_{\Omega} dxdydz$, donde Ω corresponde al casquete esférico definido por $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2+z^2=9$ con $z\geq 0$.

5) Dado el sólido Ω delimitado por las esferas $x^2+y^2+z^2\leq 8;\ \ x^2+y^2+z^2\leq 4y$, trace la gráfica del sólido. Expresa la integral $I=\iiint_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dV$ en coordenadas esféricas y calcula su valor.

6) Calcula la integral $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$, donde Ω representa la región situada dentro $x^2+y^2+z^2=4z$ y fuera de $x^2+y^2+z^2=2z$.

7) Evalúa la integral $\iiint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$, donde Ω representa el sólido vinculado a $x^2+y^2+z^2\leq 4x,\ x^2\geq y^2+z^2$.

8) Halla la integral $\iiint\limits_R \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\,dV$, con R definido como el sólido que se encuentra dentro de la esfera $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ y también dentro del cono $x^2=y^2+z^2$.

9) Evalúa la integral $\iiint\limits_\Omega z^2\,dxdydz$, donde Ω es la región compartida entre las esferas $x^2+y^2+z^2\le 4$ y $x^2+y^2+z^2\le 4z$.

10) Evalúa la integral $\iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$, donde Ω es la región compartida entre las esferas $x^2+y^2+z^2=9$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

Aplicaciones de la integral triple:

Calculo de volúmenes por integrales triples.

1) Calcular el volumen del sólido delimitado por el cilindro $x^2+z^2=4$ y los cilindros parabólicos $y=z^2$, $y=8-z^2$.

2) Determine el volumen del sólido contenido en la región común de la esfera $x^2+y^2+z^2=4z$ y el paraboloide $x^2+y^2=2z$.

3) Halle el volumen del sólido que está limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ en la parte superior y el paraboloide $x^2+y^2=6z$. en la parte inferior.

4) Halle el volumen total del espacio comprendido entre el cono $2(x^2+y^2)-z^2=0$ y el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=-4$, $z=0$.

5) Evaluar el volumen del sólido contenido entre las superficies:

a) $x^2+y^2=1,\ \ z=4-x^2-y^2,\ z=0$

b) $z^2=x^2+y^2,\ \ z=12-x^2-y^2,\ z\ge 0$

c) $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2\le z^2$

d) $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2,\ z=2$

e) $x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ \ z\ge 0$

Masa y centro de gravedad de un sólido.

1) Halle el centro de masa del sólido limitado por la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 9$. Suponga que la densidad es igual a 1.
2) Un sólido tiene la forma del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ con $0 \leq z \leq 6$. Se supone que la densidad del sólido es: $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.
3) Halle el centro de masa del sólido, de densidad de masa constante ρ, limitada por las gráficas del cono circular recto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 4$.
4) Halle la masa y el centro de masa del sólido cuya densidad es $\rho(x, y, z) = 4$, limitada por $z = x^2 + y^2$, $z = 6$.
5) Halle la masa y el centro de masa del sólido cuya densidad es $\rho(x, y, z) = 10 + x$. El sólido es un tetraedro limitado por $x + 3y + z = 6$ y los planos coordenados.
6) Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloide $y^2 + 2z^2 = 4x$ y el plano $x = 2$.
7) Calcule la masa del sólido limitado por el plano XY, el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ si la densidad es $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.
8) Halle la masa del sólido limitado por las superficies: $x^2 + y^2 = 4x$, $4z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ sabiendo que su densidad es $\delta(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
9) Determine el centroide del sólido limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y contenido en el cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.
10) Sea S el sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $z = x + 5$. Determine la primera componente del centroide del sólido S.

Referencias

Adams, R. A., & Essex, C. (2021). *Cálculo: Una nueva vista de la geometría analítica [Cálculo en varias variables*]. Editorial P.

Larson, R., & Edwards, B. (2020). *Cálculo y geometría analítica [Cálculo en una variable]*. Editorial W.

Stewart, J. (2019). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas [Cálculo en una variable]*. Editorial Z.

Thomas, G., & Finney, R. L. (2017). *Cálculo: Una y varias variables [Cálculo en varias variables]*. Editorial Q.