

Precálculo I

Guía de Trabajo



Visión

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

Misión

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental

Material publicado con fines de estudio
Código: UC0672
2017



Presentación

Precálculo I es una asignatura que tiene como finalidad sentar las bases para desarrollar y fortalecer las habilidades numéricas del estudiante universitario. Las habilidades numéricas se revelan en la capacidad para manejar y utilizar números en operaciones matemáticas e implica la agilidad mental para la realización de operaciones con números; la Matemática es la ciencia que se ocupa de describir y analizar las cantidades, el espacio y las formas, los cambios y relaciones, así como la incertidumbre. Si miramos a nuestro alrededor vemos que esos componentes están presentes en todos los aspectos de la vida de las personas, en su trabajo, en su quehacer diario, en los medios de comunicación, entre otros. Es evidente, que en nuestra sociedad, dentro de los distintos ámbitos profesionales, es preciso un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas. Estas habilidades coadyuvan la formación del perfil profesional de nuestros estudiantes que les permitirán el desarrollo de la lógica y el razonamiento en sus actividades personales, académicas y profesionales.

En concordancia con lo anterior, la competencia que desarrolla la asignatura es: Identifica, define, analiza y aplica los diferentes teoremas, propiedades en los números reales, funciones en la solución de situaciones problemáticas, demostrando interés en los trabajos de investigación, tolerancia y respeto a los demás.

Es recomendable que el estudiante trabaje y lea con responsabilidad el presente Material de Trabajo y formule sus dudas a su docente para que pueda desarrollar las prácticas planteadas. Además, requiere la revisión y consulta complementaria de otros libros, principalmente los propuestos en la bibliografía básica y complementaria del sílabo; incluso de información confiable de Internet y otros medios electrónicos. Es inexorable la visita a la plataforma de búsqueda de ProQuest. Este recurso, que ofrece nuestra universidad a través de la Biblioteca Virtual, representa una mejor manera de buscar, encontrar, usar y compartir la información.

Finalmente, agradecemos a los docentes de la asignatura de Precálculo I; quienes trabajaron en la elaboración del presente Manual ya que sus aportes y sugerencias han contribuido a mejorar la presente edición.

Los autores.



Índice

	Pág.
VISIÓN	2
MISIÓN	2
PRESENTACIÓN	
ÍNDICE	4
PRIMERA UNIDAD: Números Reales	6
Tema N° 1: Números reales y sus propiedades.	7
Tema N° 2: Exponentes y radicales.	11
Tema N° 3: Factorización I.	16
Tema N° 3: Factorización II.	18
Tema N° 4: Ecuaciones.	20
Tema N° 5: Inecuaciones.	23
SEGUNDA UNIDAD: Funciones	27
Tema N° 7: Definición de Funciones.	28
Tema N° 8: Catálogo de Funciones básicas.	31
Tema N° 9: Gráfica de Función definida por partes.	36
Tema N° 10: Transformación de funciones.	39
Tema N° 11: Funciones Inversas.	44
Tema N° 12: Funciones Cuadráticas.	48
Tema N° 13: Funciones Polinomiales.	51
Tema N° 14: Funciones Racionales.	54
TERCERA UNIDAD: Función Exponencial y Logarítmica	57
Tema N° 15: Funciones Exponenciales.	58
Tema N° 16: Funciones Logarítmicas.	62
Tema N° 17: Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas.	64



Tema N° 18: Modelado de Funciones Exponenciales y Logarítmicas.	66
CUARTA UNIDAD: Funciones Trigonómicas	70
Tema N° 19: Medición de Ángulos en radianes y en grados sexagesimales.	71
Tema N° 20: Razones Trigonómicas.	75
Tema N° 21: Aplicación del Triángulo Rectángulo. (Ángulo de elevación y Depresión)	80
Tema N° 22: Gráfica de Funciones trigonométricas Seno y Coseno.	83
Tema N° 23: Funciones Trigonómicas Inversas.	86
Tema N° 24: Identidades trigonométricas.	91
Tema N° 25: Ley de Senos y Cosenos.	96



Unidad I

LOS NÚMEROS REALES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de, resolver ejercicios de números reales, polinomios, ecuaciones e inecuaciones aplicando los procedimientos del cálculo en situaciones formales y de la vida cotidiana



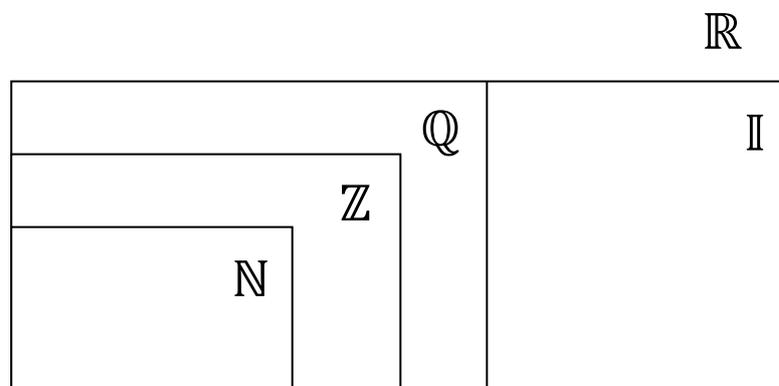
SEMANA 01
NÚMEROS REALES

SESIÓN N° 01
PRESENTACIÓN DE ASIGNATURA
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

TEMA 01: NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES

A. BLOQUE I

Llene los espacios en blanco



1. Un número real es _____ si se puede escribir como la razón p/q entre dos enteros, donde $q \neq 0$
2. El punto 0 sobre la recta de números reales se llama _____

Propiedad	Adición	Multiplicación
Clausura	$(a + b) \in \mathbb{R}$	$(a \cdot b) \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento neutro	Es el cero 0 porque: $0 + a = a + 0 = a$	Es el 1 porque: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
Elemento inverso	Es $-a$ porque: $a + (-a) = 0$	Para $a \neq 0$ es $\frac{1}{a}$ porque $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	



Indique la(s) propiedad(es) de los números reales que justifica(n) cada afirmación:

3. $26 \cdot 12$ es un número real
4. $2+(-7+5)=(2+(-7))+5$
5. $(x+3)(2y+7)=(x+3)(2y)+(x+3)(7)$
6. $5 + [\sqrt{2} + (-\sqrt{2})] = 5$
7. $\frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}$
8. $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$
9. $[(3)[4(5)]=[3(5)](4)]$
10. $3(x+2)=3(2)+3x$

B. BLOQUE II

1. En los siguientes ejercicios, determine qué números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros positivos, (c) enteros (negativos y positivos), (d) números racionales y (e) números irracionales.
 - a) $\{-9; -7/2; 5; 2/3; \sqrt{2}; 0; 1; -4; 2; -11\}$
 - b) $\{\sqrt{5}; -7; -7/3; 0; 3; 12; 5/4; -3; 12; 5\}$
 - c) $\{2,01; 0,666\dots; 0,7575; -4,63; \sqrt{10}; -75; 4\}$
 - d) $\{-\pi; -1/3; 6/3; 1/2; \sqrt{2}; -7,5; -1,8; -22\}$
 - e) $\{25; -17; -12/5; \sqrt{9}; 3; 12; \pi/2; 7; -11,1; 13\}$
2. En los siguientes ejercicios, trace la gráfica del conjunto solución en la recta de números reales.
 - a) $x \leq 5$
 - b) $x < 0$
 - c) $[4, \infty)$
 - d) $-2 < x < 2$
 - e) $-1 \leq x < 0$
 - f) $[-2, 5)$
 - g) $x \geq -2$
 - h) $x > 3$
 - i) $(-\infty, 2)$
 - j) $0 \leq x \leq 5$
 - k) $0 < x \leq 6$
 - l) $(-1, 2]$
3. En los siguientes ejercicios, use notación de desigualdad y notación de intervalo para describir el conjunto.
 - a) "y es no negativo"
 - b) "y es no mayor a 25"
 - c) "x es mayor a -2 y a lo más 4"
 - d) "y es al menos -6 y menor que 0"
 - e) "t es al menos 10 y a lo más 22"
 - f) "k es menor que 5 pero no menor que -3"
 - g) "El peso del perro, W, es más de 65 libras"
4. Determine el valor de "E" resolviendo el valor absoluto.
 - a) $E=|-10| - |-25|$
 - b) $E=-3|-3|$
 - c) $E=-|3 - 8|$
 - d) $E=|-1| - |-2|$
 - e) $E=-3 - |-3|$
 - f) $E=\frac{-5}{|-5|} + 1$



5. En los siguientes ejercicios, escriba el símbolo correcto ($<$, $>$ o $=$) entre los dos números reales.

a) $|-3|$ $-|-3|$

d) $-|-6|$ $|-6|$

b) $|-4|$ $|4|$

e) $-|-2|$ $-|2|$

c) -5 $-|5|$

f) $-(-2)$ -2

Indique la(s) propiedad(es) de los números reales que justifica(n) cada afirmación:

6. $x + 9 = 9 + x$

7. $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

8. $(x + 3) - (x + 3) = 0$

9. $x + (y + 10) = (x + y) + 10$

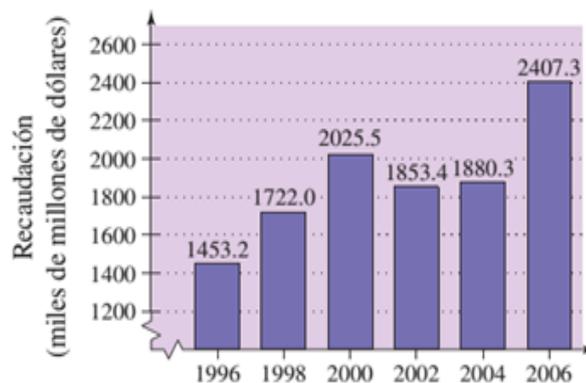
10. $x(3y) = (x \cdot 3)y = (3x)y$

C. BLOQUE III

1. En los ejercicios, el departamento de contabilidad de una compañía embotelladora de bebidas para deporte está comprobando si los gastos reales de un departamento difieren, en más de \$500 o en más de 5%, respecto de los gastos presupuestados. Llene las partes faltantes de la tabla y determine si cada gasto real pasa el "examen de varianza de presupuesto".

	Gasto presupuestado	Gasto real	$ a - b $	$0.05b$
	b	a		
Sueldos	\$112 700	\$113 356		
Utilidades	\$9 400	\$9 772		
Impuestos	\$37 640	\$37 335		
Seguros	\$2 575	\$2 613		

2. Use la gráfica de barras, que muestra la recaudación del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados de 1996 a 2006. En cada ejercicio se indican los gastos del gobierno federal. Encuentre la magnitud del excedente o déficit para el año.





Año	Recaudación	Gastos	Recaudación – Gastos
1996		\$1560.6 miles de millones	
1998		\$1652.7miles de millones	
2000		\$1789.2miles de millones	
2002		\$2011.2 miles de millones	
2004		\$2293.0 miles de millones	
2006		\$2655.4 miles de millones	

En los siguientes ejercicios, determine qué números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros positivos, (c) enteros (negativos y positivos), (d) números racionales y (e) números irracionales.

- $\{0; -10; 50; \frac{22}{7}; 0,538; \sqrt{7}; 1,2\bar{3}; -\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2}\}$
- $\{1,001; 0,333 \dots; -\pi; -11; 11; \frac{13}{15}; \sqrt{16}; 3,14; \frac{15}{3}\}$

Indique la(s) propiedad(es) de los números reales que justifica(n) cada afirmación:

- $(x + 3) - (x + 3) = 0$
- $(z - 2) + 0 = z - 2$
- $x(y + 10) = (x + y) + 10$
- $x(3y) = (3x)y$
- $3(t - 4) = 3t - 3(4)$
- $\frac{1}{7}(7(12)) = (\frac{1}{7}(7))12 = 1(12) = 12$



SEMANA 01
NÚMEROS REALES

SESIÓN N° 02
TEMA 02: EXPONENTES Y RADICALES

Se llama así a los conjuntos numéricos expresados como potenciación y que se pueden representar de la siguiente manera:

$$a^n = P$$

- **a** es la base
- **n** es el exponente
- **P** es la potencia

PROPIEDADES.

1. EXPONENTE CERO

$$x^0 = 1 \quad \text{Ejemplo : } 5^0 = 1$$

2. EXPONENTE NEGATIVO

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad \text{Ejemplo : } x^{-8} = \frac{1}{x^8}$$

3. MULTIPLICACIÓN DE BASES IGUALES

$$x^m x^n x^p = x^{m+n+p} \quad \text{Ejemplo : } x^5 x^7 x^{10} = x^{5+7+10} = x^{22}$$

4. DIVISIÓN DE BASES IGUALES

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad \text{Ejemplo : } \frac{x^{10}}{x^5} = x^{10-(5)} = x^{10-5} = x^5$$

5. MULTIPLICACIÓN DE BASES DIFERENTES

$$(xy)^m = x^m y^m \quad \text{Ejemplo : } (27)^3 = 2^3 7^3 = 8(343) = 2744$$

6. DIVISIÓN DE BASES DIFERENTES

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad \text{Ejemplo : } \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

7. DIVISIÓN DE FRACCIONES CON EXPONENTE NEGATIVO

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m \quad \text{Ejemplo : } \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$



8. POTENCIA DE UNA POTENCIA

$$(x^m)^n = x^{mn} \quad \text{Ejemplo : } \left[(x^2)^3 \right]^{-4} = x^{(2)(3)(-4)} = x^{-24} = \frac{1}{x^{24}}$$

9. EXPONENTE FRACCIONARIO

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{Ejemplo : } \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$$

10. RAÍZ DE RAÍZ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{x}}}} = \sqrt[mnpq]{x} \quad \text{Ejemplo : } \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt{x^3}}}} = \sqrt{(3)(4)(5)(2)}{\sqrt{x^3}} = 120\sqrt{x^3}$$

11. RAÍZ DE UN PRODUCTO

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \quad \text{Ejemplo : } \sqrt[5]{x^{10}y^{25}} = \sqrt[5]{x^{10}}\sqrt[5]{y^{25}} = x^2y^5$$

12. RAÍZ DE UN COCIENTE

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad \text{Ejemplo : } \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{2}{5}$$

Ejercicios

A. BLOQUE I

1. Simplificar:

$$\frac{3^{2n+1} + 9^{n+1}}{9^{n+1} - 3^{2n+1}}; n \in \mathbb{N}$$

2. Simplificar:

$$\frac{5 \times 2^{m+2} - 2^{m+4} + 6 \times 2^{m-1}}{2^{m+5} - 15 \times 2^m - 2 \times 2^{m+3}}$$

3. Efectuar:

$$\frac{15^3 \times 16^3 \times 25^3 \times 49}{27 \times 2^{12} \times 5^9 \times 7}$$

4. Al reducir:

$$\frac{x^{2^4} \cdot (x^2)^4 \cdot x^{(-2)^4} \cdot x^{-2^4}}{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot x^8}$$

5. Reducir:

$$\frac{x^4 \cdot x^6 \cdot x^8 \cdot x^{10} \dots x^{40}}{x^1 \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot x^7 \dots x^{37}}$$



6. Indicar el exponente final de (xy) en:

$$\frac{x^4 y^4 \overbrace{(xy)^3 (xy)^3 \dots (xy)^3}^{20 \text{ veces}}}{\underbrace{(x^2 y^2)(x^2 y^2) \dots (x^2 y^2)}_{30 \text{ veces}}}$$

7. Siendo: "n" un número natural mayor que la unidad; al efectuar:

$$\left(\frac{3^n - 2^n}{2^{-n} - 3^{-n}} \right)^{1/n}$$

Tendremos:

8. Simplificar:

$$\left(b^b \sqrt{b^b b^{2b} + 1} \right)^{b^{b-b^2}}$$

B. BLOQUE II

1. Reducir:

$$Q = \left(\frac{3}{2} \right)^{-n} \left(\frac{4}{9} \right)^{-2n} \left(\frac{8}{27} \right)^n$$

2. Reducir:

$$E = \frac{\sqrt[8]{5\sqrt{x^2}} \sqrt[4]{10\sqrt{x^{13}}}}{\sqrt{20\sqrt{x^3}}}$$

3. Calcular el valor de :

$$T = \frac{4^3 \left(\frac{4}{8 \frac{4}{3}} \right)^{-n}}{\left[4(4^{-1})^n \right]^2}$$

4. Hallar el valor de "x":

$$x^{-1} \sqrt[3]{2\sqrt{3x-1}} - 3x^{-7} \sqrt[8]{8x-3} = 0$$



5. Hallar el valor de "x":

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$$

6. Reducir:

$$R = \left[2^{-2}(2^2)^2\right]^{-2} \sqrt[3]{2^2}$$

7. Calcular el valor de :

$$S = \frac{2^{x+4} + 36(2^{x-2})}{2^{x+5} - 2(2^{x+3}) - 4(2^{x+1}) - 6(2^{x-1})}$$

8. Calcular el valor de :

$$P = \frac{21^6 \cdot 35^3 \cdot 80^3}{15^4 \cdot 14^9 \cdot 30^2}$$

9. Efectuar:

$$Q = m-n \sqrt{\frac{6^m \cdot 3^n + 2^{m+n}}{6^n \cdot 3^m + 4^n}}$$

10. Resolver:

$$R = (x^m)^{\frac{1}{m}} - \left(x^{1+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{m}{m+1}} + m\sqrt{x^{2m}}$$

C. BLOQUE III

Resuelve y/o simplifique cada uno de los sgtes ejercicios:

$$1. C = n \sqrt{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

$$2. Q = \left(3^{n^2+n+4} - 3^{n^2+n+2}\right) / \left[3\left(3^{n^2+n}\right)\right]$$

$$3. F = \sqrt[6]{\frac{x^5 \sqrt[8]{x^3}}{x^3 \sqrt[4]{x}}} \cdot \sqrt[16]{\frac{x^5 \cdot x^5 \dots x^5}{9 \text{ veces}}}$$



$$4. \quad K = \left[27 \left(\frac{81}{625} \right)^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{729}{8000} \right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1024}{243} \right)^{\frac{2}{5}} + 3375^{\frac{1}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$5. \quad 3^{10x} + 3^{10x-1} + 3^{10x-2} + 3^{10x-3} + 3^{10x-4} = 363$$

$$6. \quad \left[\frac{\sqrt[3]{m\sqrt{a^5} \sqrt[4]{(c/b)^2}}}{\sqrt{(ab)^2} \sqrt[3]{c} \sqrt[m]{b^5}} \right]^{-1} = \left(\frac{1}{a^9} \frac{1}{b^9} \right)^{10}$$

$$7. \quad Q = 3 + m^{-n} \sqrt{\frac{6^m + 3^n + 2^{m+n}}{6^n + 3^m + 4^n}}$$

$$8. \quad R = (x^m)^{\frac{1}{m}} + \left(x^{1+\frac{1}{m}} \right) + \sqrt[m]{x^{2m}}$$

$$9. \quad x^{-1} \sqrt[3]{2\sqrt{3x-1}} - 3x^{-7} \sqrt[3]{8x-3} = 0$$

$$10. \quad E = \frac{5 \cdot 2^{m+2} - 2^{m+4} + 6 \cdot 2^{m-1}}{2^{m+5} - 15 \cdot 2^m - 2 \cdot 2^{m+3}}$$



SEMANA 01 FACTORIZACIÓN

SESIÓN N°03 TEMA 03: FACTORIZACIÓN I

FACTOR ALGEBRAICO

Un polinomio "F" no constante será factor algebraico de "P" si y sólo si "P" es divisible por "F".

Ejemplos:

$$\blacksquare P_{(x)} = (x + 2)^3 (x + 1)^2$$

Son factores algebraicos de $P_{(x)}$:

FACTOR PRIMO

Un polinomio "F" será primo de otro polinomio "P" si "F" es factor algebraico de "P" y primo a la vez.

Ejemplos:

$$\blacksquare P_{(x)} = (x + 2)^3 (x + 1)^2 (x + 5)^6$$

Son factores primos de $P_{(x)}$:

$$\blacksquare P_{(x)} = (x) (x + 2)^6 (x - 1)^2$$

Son factores primos de $P_{(x)}$:

FACTORIZACIÓN

Es el proceso de transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.

$$\begin{array}{c} \text{Multiplicación} \\ \downarrow \\ P_{(x)} = x^2 + 3x + 2 \equiv (x + 1) (x + 2) \\ \uparrow \\ \text{Factorización} \end{array}$$

A. BLOQUE I

1. Factorizar: $x^2y + x^2z$
2. Factorizar: $2a^2x + 6ax^2$
3. Factorizar: $m^2 + 13m - 30$
4. Factorizar: $x^2 - 17x - 60$; e indicar uno de los factores primos
5. Factorizar: $16x^2 - 25y^4$
6. Factorizar: $4x^2 - 81y^4$
7. Factorizar: $100 - x^2y^6$ e indicar uno de los factores primos
8. Hallar la suma de los factores que se obtienen de factorizar: $2p^2 + 3rp + 4p + 3rp$
9. Factorizar y dar como respuesta la suma de coeficientes de uno de sus factores.
 $3ab + 1 + 3b + a$
10. Factorizar: $4x^2 - (x + y)^2$



B. BLOQUE II

1. Factorizar: $a(x - 1) - (a + 2)(x - 1)$
2. Factorizar: $18a^2 - 13a - 5$
3. Indicar el número de factores primos de: $4x^2 - 20xy + 25y^2$
4. Factorizar: $4m(a^2 + x - 1) + 3n(x - 1 + a^2)$; e indicar la suma de coeficientes de uno de los factores primos.
5. Factorizar: $-m - n + x(m + n)$
6. Indica un factor de: $6x^8 - 13x^4 + 6$
7. Factorizar: $8m^3 - 27n^{12}$ e indicar un factor primo
8. Factorizar: $x(a - 1) + y(a - 1) - a + 1$
9. ¿Cuántos binomios se obtienen de la factorización de: $\frac{a^8}{81} - x^4$
10. Factorizar: $(m - n)^2 + 6(m - n) + 9$

C. BLOQUE III

En los ejercicios presentados a continuación, factorizar cada uno de ellos.

1. $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$; e indicar la suma de los factores primos.
2. $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$ e indicar uno de los factores primos.
3. $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4$
4. $121 + 198x^6 + 81x^{120}$
5. $a^2 + 24am^2x^2 + 144m^4x^4$
6. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2$
7. $\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3}$
8. $a^2 + 2a(a + b) + (a + b)^2$
9. $-4m(n - m) + 4m^2 + (n - m)^2$
10. $a^4 - a^2b^2 + \frac{b^2}{4}$



SEMANA 02
FACTORIZACIÓN

SESIÓN N°01
TEMA 04: FACTORIZACIÓN II

A. BLOQUE I

Resuelve los ejercicios empleando técnicas de factorización de expresiones algebraicas.

- $72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}y^{b+1} + 24x^a y^{2b}$
- $(x+y)^9(x-y)^5 - (x^2 - y^2)^7$
- $x^{m+n} + y^{m+n} + (xy)^m + (xy)^n$
- $x^y y^x + xy + x^{y+1} + y^{x+1}$
- $x^4 + y^4 + 2xy(x^2 + y^2) + 3x^2 y^2$
- $9(x-y)^2 + 12(x-y)(x+y) + 4(x+y)^2$
- $x^{4n} + 7x^{2n} + 12$
- $64x^{12}y^3 - 68x^8y^7 + 4x^4y^{11}$
- $a(x+1) + b(x+1)$
- $a^2 + ab + ax + bx$

B. BLOQUE II

Resuelve los ejercicios empleando técnicas de factorización de expresiones algebraicas.

- $256a^{12} - 289b^4 m^{10}$
- $x^6 - 8y^{12}$
- $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$
- $x^2 + 7x + 10$
- $c^2 - 4c - 320$
- $x^4 - 7x^2 + 12$
- $x^3 - 27$
- $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2$
- $(a+1)^7(a^2+1)^{10} - (a+1)^5(a^2+1)^{11}$
- $(x+3)(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1) + (x+1)$



C. BLOQUE III

Factorizar las siguientes expresiones empleando Ruffini.

1. $R(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$

2. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

3. $Q(x) = 4x^3 + 20x^2 - x - 5$

4. $R(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

5. $S(x) = 4x^4 + 9x^3 - 5x^2 + 9x - 9$

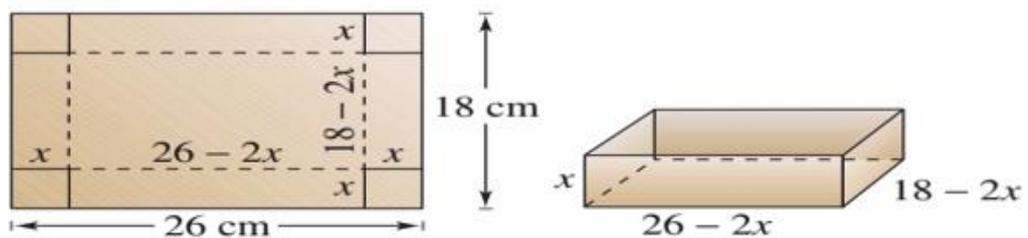
6. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

7. $H(x) = 7x^5 - 28x^3 - 7x^2 + 28$

8. $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 - 9x + 18$

9. $R(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6$

10. Volumen de una caja: Un restaurante de comida rápida para llevar esta construyendo una caja abierta, al cortar cuadrados de las esquinas de un cartón de 18 cm por 26 cm (vea figura). El borde de cada cuadrado cortado mide "X" centímetros.
- Encuentre el volumen de la caja en términos de "X".
 - Encuentre el volumen cuando $X=1$, $X=2$ y $X=3$





SEMANA 02
ECUACIONES

SESIÓN N°02 y N°03
TEMA 05: ECUACIONES LINEALES, CUADRÁTICAS Y CON RADICALES

Generación de ecuaciones equivalentes

Una ecuación puede ser transformada en una ecuación equivalente por medio de uno o más de los pasos siguientes.

	<i>Ecuación dada</i>	<i>Ecuación equivalente</i>
1. Elimine símbolos de agrupación, combine términos semejantes, o simplifique fracciones en uno o ambos lados de la ecuación.	$2x - x = 4$	$x =$
2. Suma (o reste) la misma cantidad a <i>cada</i> lado de la ecuación.	$x + 1 = 6$	$x =$
3. Multiplique (o divida) <i>cada</i> lado de la ecuación entre la misma cantidad diferente de cero	$2x = 6$	$x =$
4. Intercambie los dos lados de la ecuación	$2 = x$	$x =$

Resolución de una ecuación cuadrática

Factorización: si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo: $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x - 3)(x + 2) = 0$
 $x - 3 = 0$ $x = 3$
 $x + 2 = 0$ $x = -2$

Fórmula cuadrática: si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplo: $2x^2 + 3x - 1 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

5.1 ECUACIONES LINEALES

A. BLOQUE I

Determine el valor de "x" en las siguientes ecuaciones:

1. $47 - 3x = 5 + 11x$ Sol: $x = 3$
2. $2x - 1 = 3(2x - 15)$ Sol: $x = 11$
3. $5 + 8x = 2x + 20$ Sol: $x = 5/2$
4. $2(x - 2) = -(4 - x)$ Sol: $x = 0$



5. $2y - 3 = y + 5$ Sol: $y=8$
6. $2(3x - 49) = -x + 14$ Sol: $x=16$
7. $2 - 6x = 3x - 1$ Sol: $x=1/3$
8. $20 = 2x - (10 - 4x)$ Sol: $x=5$
9. $60x - 1 = 3(1 + 12x)$ Sol: $x=1/6$
10. $5(x-1) + 10(x+2) = 45$ Sol: $x=2$

Resuelva la ecuación para la variable indicada.

1. $PV = nRT$; para R
2. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; para R_1
3. $F = G \frac{mM}{r^2}$; para m
4. $P = 2L + 2w$; para w
5. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; para x
6. $V = \frac{1}{3}\pi r^2h$; para r
7. $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$; para t
8. $A = P\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$; para i
9. $\frac{a+1}{b} = \frac{a-1}{b} + \frac{b+1}{a}$; para a
10. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; para x

5.2 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Determine el valor de "x" en las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 9x + 18 = 0$ Sol: $x=3$; $x=6$
2. $x^2 - 5x + 6 = 0$ Sol: $x=2$; $x=3$
3. $4x^2 + 4x = 3$ Sol: $x=1/2$; $x=-3/2$
4. $2x^2 + 10x - 48 = 0$ Sol: $x=3$; $x=-8$
5. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ Sol: $x=1$; $x=3/2$
6. $3x^2 - 39x + 108 = 0$ Sol: $x=4$; $x=9$
7. $2x^2 - 9x + 9 = 0$ Sol: $x=3$; $x=3/2$



8. $3x^2 + 2x = 8$ Sol: $x = -2$; $x = 4/3$
9. $4x^2 + 12x + 9 = 0$ Sol: $x = -3/2$
10. $3x^2 - 16x + 5 = 0$ Sol: $x = 5$; $x = 1/3$

B. BLOQUE II

Determine el valor de "x" en las siguientes ecuaciones:

1. $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{3x+2}{3} = 1$
2. $\frac{(x-3)^2}{2} - x + x^2 = x - (x-2)$
3. $\frac{1}{x-1} + 3x + 3x^2 - 2 = \frac{3}{x-1} + 3x^2$
4. $(x-3)^2 - \frac{x-1}{3} = 2x$
5. $\frac{x-3}{3} - \frac{1}{x-1} = 3x$
6. $x - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 5x + 5$
7. $\frac{x-3}{x} + 3x - \frac{5}{x} = 2x - \frac{3}{x} - 3$
8. $3x - \frac{8}{x} + (x-1)^2 = 3(x-2) - (x-5)$
9. $(x-3)(x-2) + \frac{x(x-3)}{2} = (x-2)^2$
10. $(x-2)x - \frac{x+2}{3} - \frac{(x-2)(x+2)}{2} = (x-2)^2 - 4$

5.3 ECUACIONES CON RADICALES

C. BLOQUE III

Determine el valor de "x" en las siguientes ecuaciones con radicales:

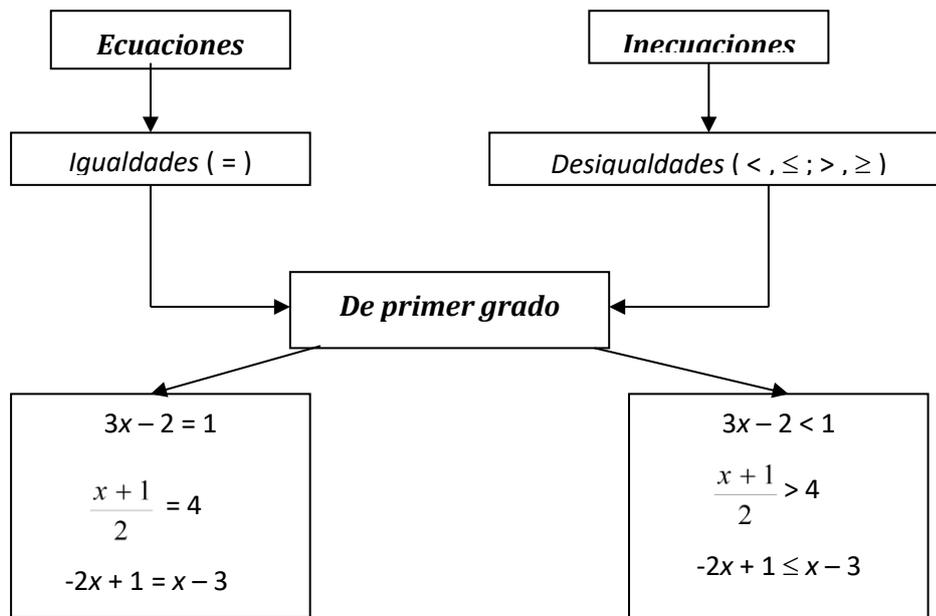
1. $3\sqrt{6x+1} - 5 = 2x$
2. $\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} = 1$
3. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$
4. $1 + \sqrt{x+1} = \frac{x}{3}$
5. $\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}$
6. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} = \sqrt{4x+1}$
7. $2\sqrt{x+4} = \sqrt{5x+4}$
8. $\sqrt{x^2+3x+7} = 5$
9. $\sqrt{2x+5} + 6 = 3x + 3$
10. $2\sqrt{2x-1} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9}$



SEMANA 03
INECUACIONES

SESIÓN N°01 y N°02
TEMA 06: INECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

6.1 INECUACIÓN LINEAL



Resolver una inecuación significa determinar los valores que deben tomar las incógnitas para que se cumpla la desigualdad.

Ejemplo: Resolver la siguiente Inecuación lineal:

$$-3x + 4 < 2x$$

Solución:

$$-3x + 4 < 2x - 6 \Leftrightarrow -3x - 2x < -6 - 4 \quad \{\text{transponiendo}\},$$

$$\Rightarrow -5x < -10 \quad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore x > 2$$

{dividiendo ambos miembros de la inecuación por -5 , se cambia el sentido de la desigualdad}

$S = \{x \mid x > 2\}$, $x \in (2, \infty)$, la representación gráfica de la solución es:



6.2 INECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación de segundo grado se simboliza como:

$$ax^2 + bx + c < 0$$



Para resolver una inecuación cuadrática considere los siguientes pasos:

Ejemplo 1:

1° Se pasa todo a un solo lado de la inecuación.

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

2° Se factoriza la inecuación cuadrática.

$$(x-2)(x-3) > 0$$

3° Para que el producto sea mayor que cero, entonces ambos factores son positivos o ambos factores son negativos como se muestra en el recuadro:

$(x-2) > 0$ y $(x-3) > 0$	v	$(x-2) < 0$ y $(x-3) < 0$
$x > 2$ y $x > 3$		$x < 2$ y $x < 3$
Prevalece: $x > 3$		Prevalece $x < 2$
$]3, \infty[$	v	$] -\infty, 2[$

4° La solución es la unión: $< -\infty; 2 > \cup < 3; +\infty >$

Ejemplo 2:

Resolver la siguiente inecuación cuadrática:

$$4x^2 + 20x + 24 < 0$$

Solución:

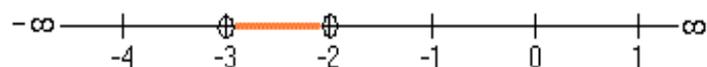
$$4x^2 + 20x + 24 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2) < 0$$

Hay dos posibilidades:

(i) $x+3 > 0$ y $x+2 < 0 \Leftrightarrow x > -3$ y $x < -2 = -3 < x < -2$, ó bien

(ii) $x+3 < 0$ y $x+2 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ y $x > -2 = \emptyset$

$S = \{x \mid -3 < x < -2\}$, $x \in (-3, -2)$; la representación gráfica de la solución es:



A. BLOQUE I:

En los siguientes ejercicios determine el conjunto solución y su gráfica:

1. $3 - x < 2 + 5x$

6. $1 + x > 2 - 3x$

2. $3x + 5 > 5x - 2$

7. $2(3x - 3) > 6$

3. $2(x+3) + 3(x-1) > 2(x+2)$

8. $3(3 - 2x) < 2(3 + x)$

4. $3 - (x - 6) \leq 4x - 5$

9. $\frac{3x-5}{4} - \frac{x-6}{12} \leq 1$

5. $1 - \frac{x-5}{9} < 9 + x$

10. $\frac{3x-3}{5} - \frac{4x+8}{2} \leq \frac{x}{4} - 3x$



B. BLOQUE II:

En los siguientes ejercicios determine el conjunto solución y su gráfica:

1. $-5x^2 + 3x + 8 < 0$
2. $x(x+5) > 2x^2$
3. $(x-1)^2 > 9$
4. $2(-x+1)^2 \geq -2x^2 + 3$
5. $(x^2 - 9)(x+1) \geq 0$
6. $25x^2 - 101x + 102 < 0$
7. $(81-x)(4-x) > x+11$
8. $(1-x^2)(x^2-9) \leq 0$
9. $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$
10. $x^2 + 6x - 1 \leq 3x^2 + 3x - 6$

**SEMANA 03
INECUACIONES**

**SESIÓN N°03
TEMA 06: INECUACIONES FRACCIONARIAS**

6.3 INECUACIÓN FRACCIONARIA

Una Inecuación fraccionaria en una incógnita es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{ó} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \quad Q(x) \neq 0$$

Para resolver una inecuación fraccionaria se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Pasar todos los valores al primer miembro con signo cambiado.
2. Sacar el mínimo común múltiplo.
3. Factorizar el numerador y denominador.
4. Determinar los puntos críticos.
5. Ubicar los puntos en la recta numérica.

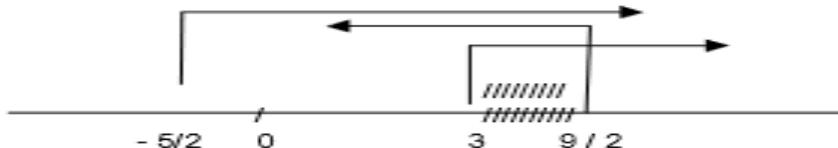
Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación fraccionaria:

$$\frac{x+1}{3} \leq x+2$$

Solución:

$\begin{aligned} \frac{x+1}{3} &\leq x+2 \\ x+1 &\leq 3x+6 \\ -5 &\leq 2x \\ x &\geq -\frac{5}{2} \quad \text{-----(1)} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{x+3}{2} &\leq x \\ x+3 &\leq 2x \\ x &\geq 3 \quad \text{-----(2)} \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &< \frac{2x+9}{4} \\ 4x &< 2x+9 \\ 2x &< 9 \\ x &< \frac{9}{2} \quad \text{-----(3)} \end{aligned}$
--	--	--

Observando las tres soluciones en la recta numérica:



$x \in [3, \frac{9}{2}] > \dots \text{ Respuesta A}$



A. BLOQUE I

En los siguientes ejercicios determine el conjunto solución y su respectiva gráfica:

1. $\frac{x}{x-1} > 0$

6. $\frac{1}{x-3} \leq 0$

2. $\frac{x+6}{3-x} < 0$

7. $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$

3. $\frac{x}{x-5} - 2 \geq 0$

8. $\frac{-1}{x} > 2$

4. $\frac{2x-1}{x+5} > 2$

9. $\frac{4}{x^2} \leq 1$

5. $\frac{x-1}{x+5} > 2$

10. $\frac{x^2+1}{x} \geq 1$

B. BLOQUE II

En cada uno de los siguientes ejercicios determine el conjunto solución y su gráfica:

1. $\frac{x}{x-3} \leq \frac{x}{x+1}$

6. $x + \frac{1}{2} > \frac{1}{x} + 2$

2. $\frac{x^2+2}{x+3} > x$

7. $x + 20 > 1 - \frac{84}{x}$

3. $\frac{x^2}{x-3} \geq x+1$

8. $x + \frac{15}{x} \geq 8$

4. $3(x+3) \geq 2(1 - \frac{1}{x})$

9. $\frac{(x+1)(x-7)}{(x-1)(x-6)(x+3)} > 0$

5. $3\left[\frac{1}{x} - 3\right] > 5(x+1)$

10. $2x + \frac{9}{x} \geq x - 6$



Unidad II

FUNCIONES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

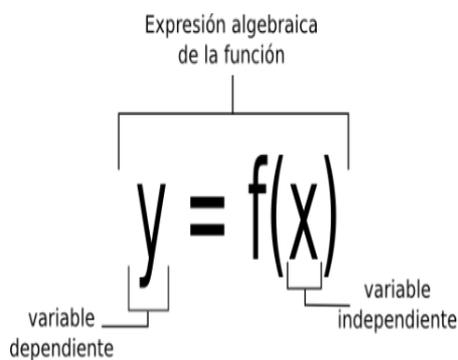
Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas de aplicación de funciones, transformaciones y algebra de funciones, utilizando el lenguaje algebraico para expresar situaciones problemáticas cotidianas.

SEMANA 04
FUNCIONES

SESIÓN N°02
TEMA 07: FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

FUNCIONES

DEFINICIÓN: Una función f es una regla de correspondencia mediante la cual a cada elemento x de un conjunto A se le asigna uno y solo un elemento y de un conjunto B .



TIPOS DE FUNCIONES

ALGEBRAICAS

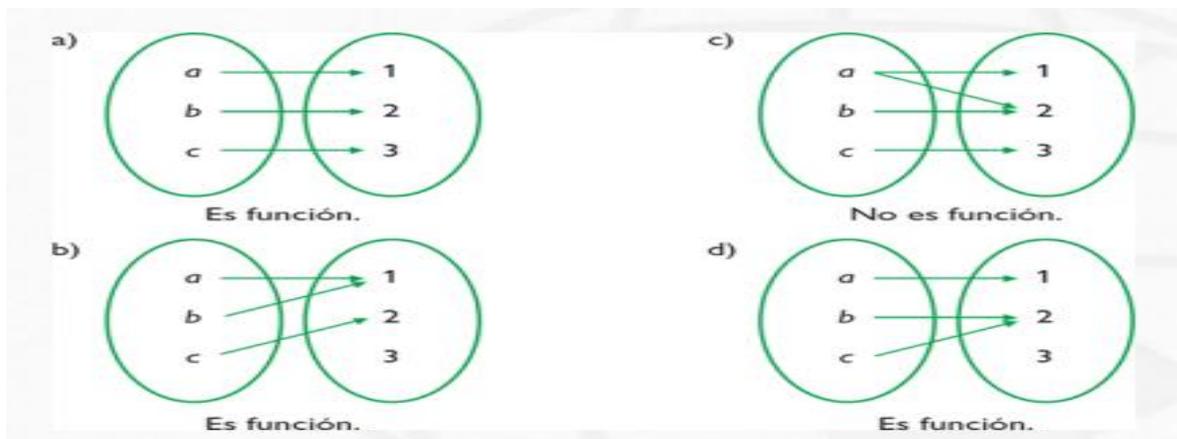
- POLINOMICAS
- RACIONALES
- RADICALES
- A TROZOS

- CONSTANTES
- DE 1° GRADO
- CUADRATICAS

TRASCENDENTES

- EXPONENCIALES
- LOGARITMICAS
- TRIGONOMETRICAS

Ejemplo:



A. BLOQUE I

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Determine el valor de " $a+b$ " $\in \mathbb{R}$; si $f(x)$ es una función:

$$f(x) = \{(1,0), (2,4), (3,-1), (2,a+b), (2,8a-2-b)\}$$

2. Si los pares ordenados $(-1; 4)$, $(2; a)$, $(3; b-a)$ y $(2; 1+b)$ pertenecen a la gráfica de una función f . Determina " $a-b$ ".
3. Si f de \mathbb{R} en \mathbb{R} es la función definida por $f(x) = x^3 - 2x + 4$; determina:

- a) El valor de $f(-1) + f(3)$
- b) Una función g ; tal que $g(x) = f(x+2)$



Evalúe la función en los valores indicados:

4. $f(x) = 2(x + 1)$
 $f(-2); f\left(\frac{1}{2}\right); f(a), f(-a), f(a + b)$
5. $f(x) = x^2 + 1; f(x + 2), f(x) + f(2)$
 $f(x + 2); f(5); F(3) + f(-2); f(-a); f(0)$
6. $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$
 $g(0); g(-2); g(a), g(a - 1), g(a + 1)$
7. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
 $f(2); f(-2); f(\sqrt{2}); f(x + 1); f(-x)$
8. $f(x) = 2|x - 1|$
 $f(-2); f(0); f(2); f(x + 1); f(x^2 + 2)$

Evalúe la función definida por partes en los valores indicados.

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
 $f(-2); f(-1); f(0); f(2)$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{Si } x \leq 1 \\ x & \text{Si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$
 $f(-4); f\left(-\frac{3}{2}\right); f(-1); f(0)$

B. BLOQUE II

En los siguientes ejercicios determine el dominio y rango de las funciones:

1. $y = \frac{2}{x - 1}$
2. $f(x) = \frac{x}{x + 4}$
3. $p(x) = \sqrt{x + 3}$
4. $g(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{x + 1}}$
5. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
6. $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x - 1}}$
7. $f(x) = \frac{x - 2}{x + 3}$
8. $g(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$
9. $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$
10. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

C. BLOQUE III

1. Costo de producción. El costo C en dólares de producir x yardas de cierta tela se expresa mediante la función:

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

- a) Determine $C(10)$ y $C(100)$
- b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?
- c) Encuentre $C(0)$. (Que representa este valor)



2. ¿Qué tan lejos puede ver? Debido a la curvatura de la tierra, la distancia máxima D que una persona puede ver, desde la parte alta de un edificio alto o desde un avión a la altura h está dada por la función:

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

Donde: $r = 3960$ millas es el radio de la tierra y D y h se miden en millas.

- a) Determine $d(0.1)$ y $d(0.2)$
b) ¿Qué tan lejos puede ver desde la terraza de la torre CN de Toronto, situada a 1135 pies desde el nivel del suelo?
c) La aviación comercial vuela a una altitud de cerca de 7 millas. ¿Qué tan lejos puede ver el piloto?
3. Flujo de sangre. Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad " v " es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). La fórmula que da v como una función de r se llama **ley del flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, se tiene.

$$V(r) = 18500(0.25 - r^2) \quad 0 \leq r \leq 0.5$$

- a) Determine $V(0.1)$ y $V(0.4)$
b) ¿Qué indican las respuestas del inciso a) acerca del flujo de sangre en esta arteria?
c) Construya una tabla de valores de $v(r)$ para $r = 0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3 ; 0.4 ; 0.5$.



4. Relatividad. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la longitud L de un objeto es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un Objeto cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por:

$$L(v) = 10 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Donde c es la velocidad de la luz.

- a) Determine $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$
b) ¿Cómo cambia la longitud de un objeto cuando se incrementa su velocidad?
5. Compras por Internet Una librería por internet cobra \$15 por envío para pedidos menores a \$100 o más, pero el envío es gratis para pedidos de \$100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x de los libros comprados dada por:

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{Si } x < 100 \\ x & \text{Si } \geq 100 \end{cases}$$

- a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$
b) ¿Qué representan las respuestas al inciso a)?
6. Multas por exceso de velocidad. En cierto estado la velocidad máxima permitida en las autopistas es 65 millas/h y la mínima es 40. La multa F por violar estos límites es \$15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.
- a) Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes, donde " x " es la velocidad a la que conduce una persona.

$$c(x) = \begin{cases} \text{[]} & \text{Si } 0 < x < 40 \\ \text{[]} & \text{Si } 40 \leq x \leq 65 \\ \text{[]} & \text{Si } x > 65 \end{cases}$$

- b) Determine $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$
7. La altura en metros de una pelota de béisbol lanzada por un niño es:

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + 3x + 6$$

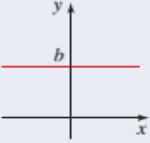
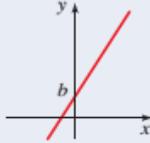
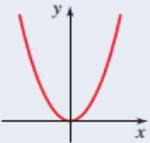
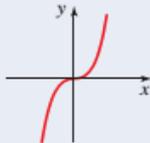
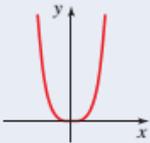
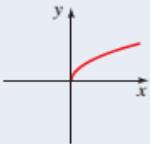
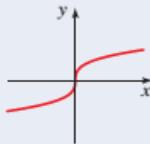
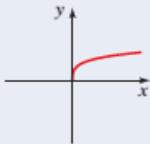
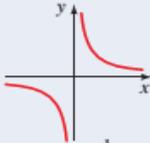
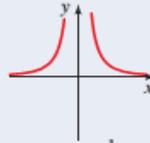
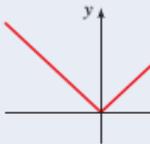
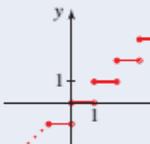


Donde "x" es la distancia horizontal en metros desde donde la pelota es lanzada. ¿La pelota volara sobre la cabeza de otro niño que está a 30 metros de distancia y que trata de atraparla? (Suponga que el niño que está tratando de atrapar la pelota tiene su guante a una altura de 5 metros).

- Un algodónero recoge 30 Kg cada hora, y demora media hora preparándose todos los días cuando inicia la jornada. La función lineal que representa esta situación es: $y=30x-15$ donde "y" representa los Kg de algodón recogido y "x" el tiempo transcurrido en horas. ¿Cuántos Kg de algodón se recogerán en una jornada de 8 horas?
- Por el alquiler de un coche cobran una cuota fija de 20.000 pesos y adicionalmente 3.000 pesos por kilómetro recorrido. Escribe la ecuación canónica que representa esta función y gráficala, ¿cuánto dinero hay que pagar para hacer un recorrido de 125 Km? y si pague un valor de 65.000 pesos ¿cuántos Kilómetros recorri ?
- Una piscina es llenada por una manguera en forma constante de modo que la altura alcanzada por el agua aumenta 20 cm por cada hora que transcurre. Si inicialmente el agua que había en la piscina llegaba a una altura de 1,2 m, ¿cuál es la ecuación de la función que determina la altura (h) del agua después de transcurridas t horas?

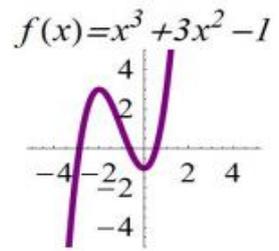
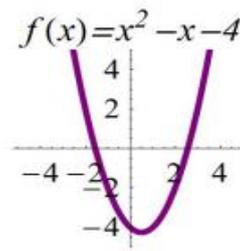
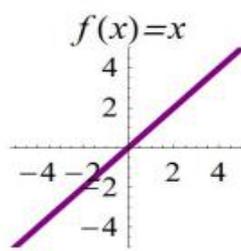
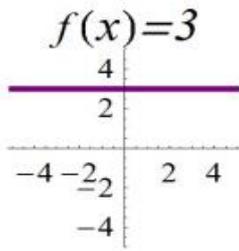
7.1 GRÁFICA DE FUNCIONES

CATÁLOGO DE FUNCIONES BÁSICAS

ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS			
Funciones lineales $f(x) = mx + b$	 $f(x) = b$	 $f(x) = mx + b$	
Funciones potencia $f(x) = x^n$	 $f(x) = x^2$	 $f(x) = x^3$	 $f(x) = x^4$
Funciones raíz $f(x) = \sqrt[n]{x}$	 $f(x) = \sqrt{x}$	 $f(x) = \sqrt[3]{x}$	 $f(x) = \sqrt[4]{x}$
Funciones recíprocas $f(x) = \frac{1}{x^n}$	 $f(x) = \frac{1}{x}$	 $f(x) = \frac{1}{x^2}$	
Función valor absoluto $f(x) = x $	 $f(x) = x $	Función entero mayor $f(x) = \lceil x \rceil$	 $f(x) = \lceil x \rceil$



Ejemplos:

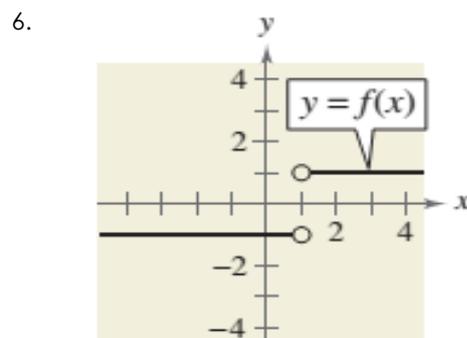
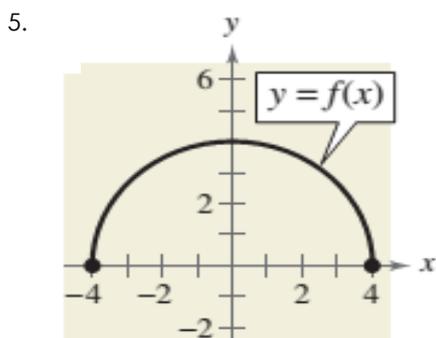
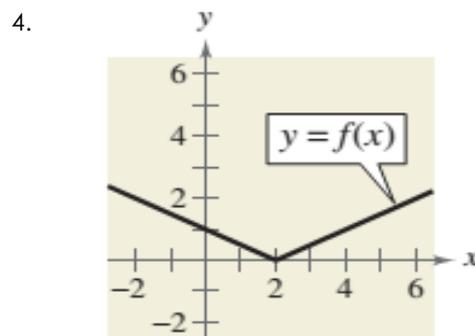
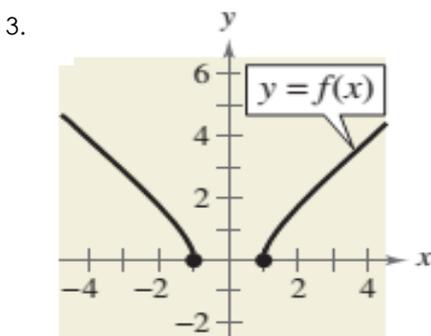
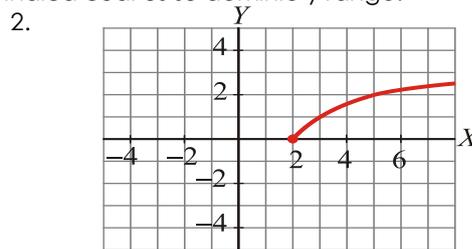
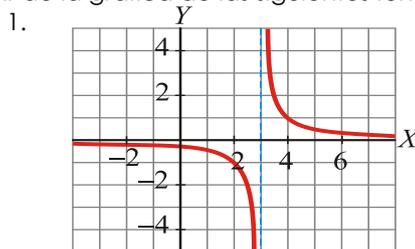


Características de una función del conjunto A al conjunto B

1. Cada elemento de A debe relacionarse con un elemento de B.
2. Algunos elementos de B pueden no relacionarse con algún elemento de A.
3. Dos o más elementos de A pueden relacionarse con el mismo elemento de B.
4. Un elemento de A (el dominio) no puede relacionarse con dos elementos diferentes de B.

A. BLOQUE I

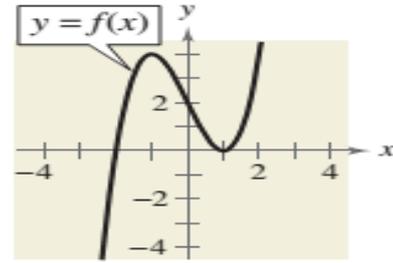
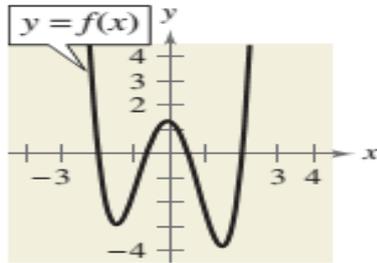
A partir de la gráfica de las siguientes funciones, indica cuál es su dominio y rango:



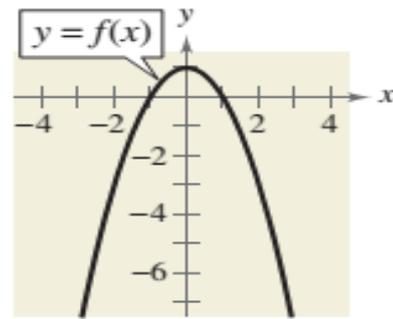
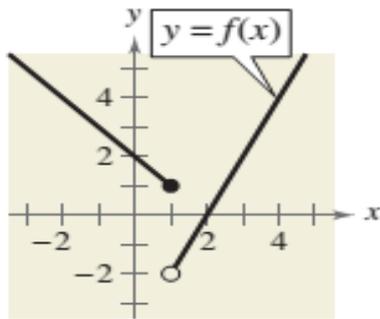


En los siguientes ejercicios, use la gráfica de la función para determinar el dominio, el rango de f y los valores de función indicados.

7. (a) $f(-2)$ (b) $f(-1)$ 8. (a) $f(-1)$ (b) $f(2)$
(c) $f(\frac{1}{2})$ (d) $f(1)$ (c) $f(0)$ (d) $f(1)$



9. (a) $f(2)$ (b) $f(1)$ 10. (a) $f(-2)$ (b) $f(1)$
(c) $f(3)$ (d) $f(-1)$ (c) $f(0)$ (d) $f(2)$



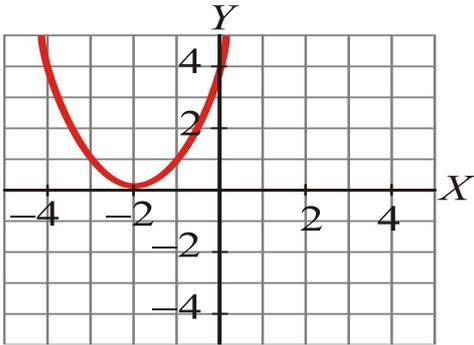
B. BLOQUE II

Asocia cada gráfica con su respectiva ecuación:

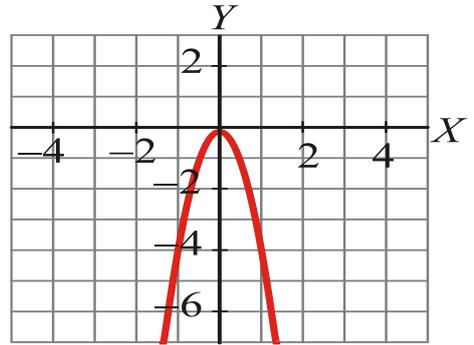
- | | |
|------------------------|--------------------------|
| 1. $y = -3x + 5$ | 6. $y = \sqrt{2x}$ |
| 2. $y = -\sqrt{x+1}$ | 7. $y = 3^{x-2}$ |
| 3. $y = \log_3 2$ | 8. $y = \frac{1}{x} + 2$ |
| 4. $y = -4x^2$ | 9. $y = (x+2)^2$ |
| 5. $y = \frac{1}{x-4}$ | 10. $y = -\frac{5}{3}x$ |



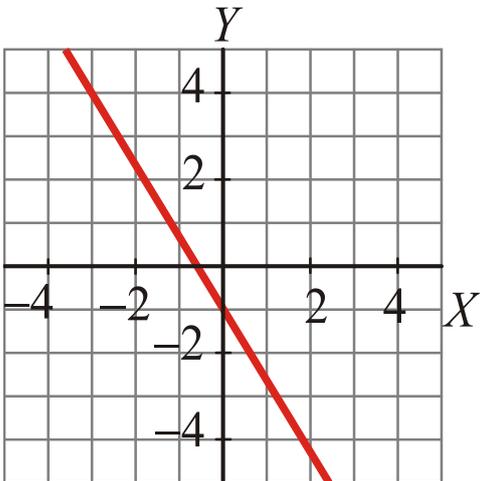
A.



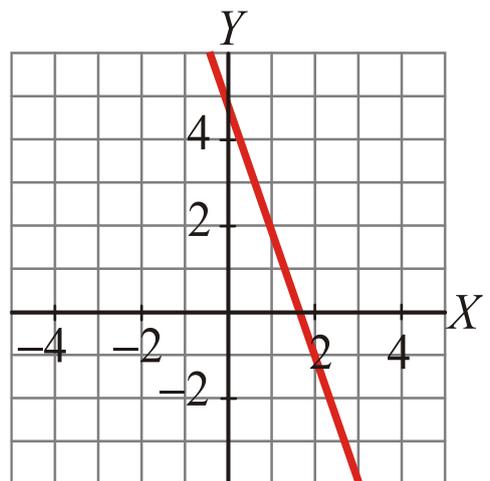
B.



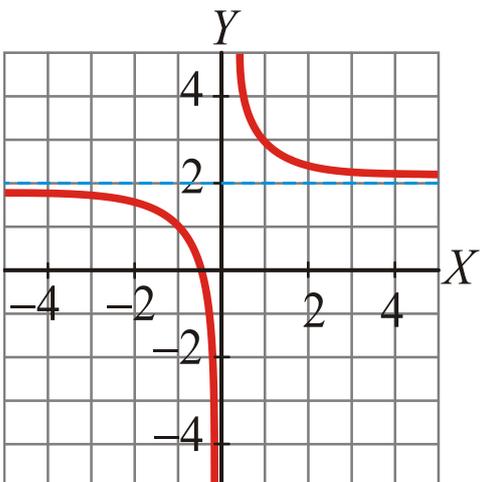
C.



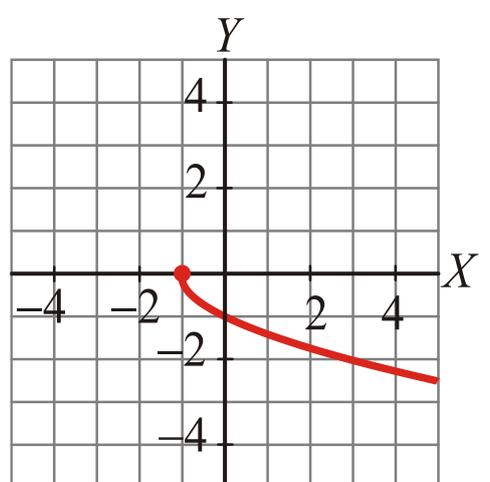
D.



E.

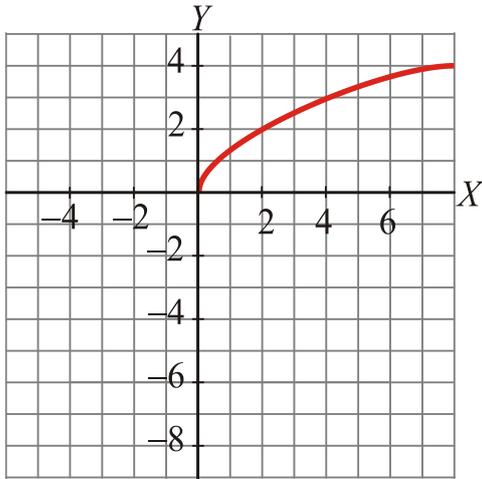


F.

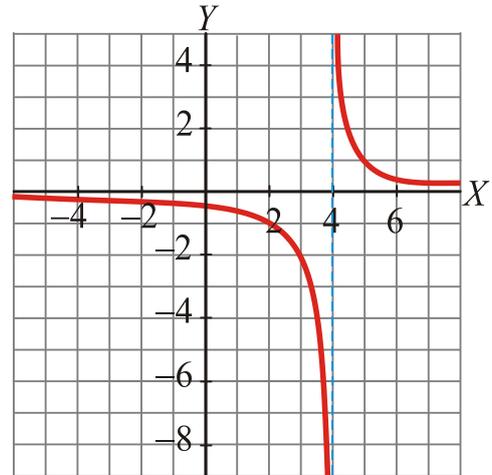




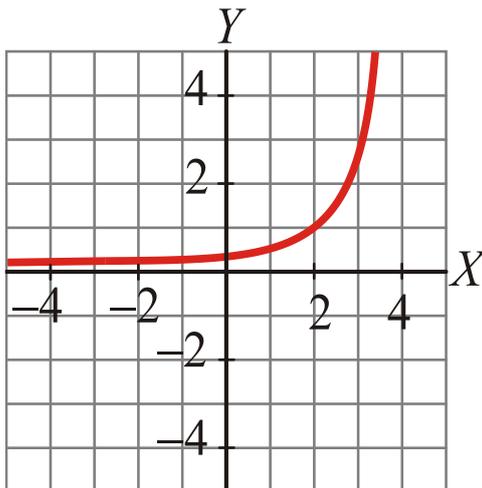
G.



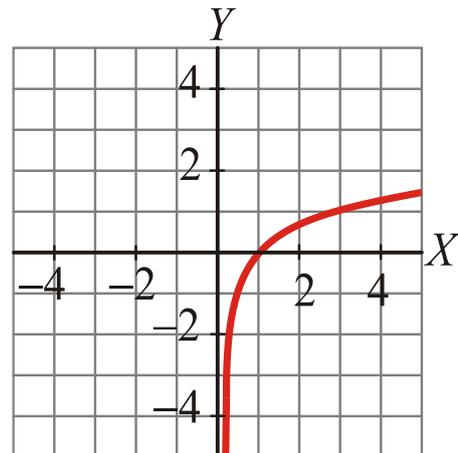
H.



K.



L.



C. BLOQUE III

Realice el bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones:

1. $y = 3x - 8$

6. $y = \sqrt{-4x}$

2. $y = -\sqrt{x-6}$

7. $y = 8^{x+2}$

3. $y = 4 - \sqrt{x-3}$

8. $y = \frac{2}{x} - 2$

4. $y = -x^2$

9. $y = (3-x)^2$

5. $y = \frac{1}{x+4}$

10. $y = -\frac{2}{3}x$



SEMANA 04
FUNCIONES

SESIÓN N°03
7.2 GRÁFICA DE FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

A. BLOQUE I

Trace la gráfica de la función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



B. BLOQUE II :

Trace la gráfica de la función definida por partes.

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -1 \\ 1 & , x > -1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq -5 \\ 3 & , x > -5 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 4 & , x \leq -4 \\ x + 6 & , x > -4 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & , x \leq -2 \\ x - 3 & , x > -2 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4+x} & , x < 0 \\ \sqrt{4-x} & , x \geq 0 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^2 & , x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & , x > 2 \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , x \leq 2 \\ x^2 + 6 & , x > 2 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & , x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & , x > 3 \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & , -2 \leq x \leq 2 \\ |x-2| & , x > 2 \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} x + 5 & , x \leq -5 \\ |2x + 7| & , x > -5 \end{cases}$

C. BLOQUE III:

Trace la gráfica de la función definida por partes.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; si \ x \leq -3 \\ |1-x| & ; si \ -3 < x < 3 \\ x & ; si \ x \geq 3 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 3 & ; si \ x \leq -2 \\ x + 3 & ; si \ -2 < x < 2 \\ x^2 & ; si \ x \geq 2 \end{cases}$



$$3. f(x) = \begin{cases} |1-x|; & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x}; & \text{si } 0 < x < 2 \\ x-2; & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{4-x^2}; & \text{si } -2 < x < 2 \\ |x|; & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} -x^2; & \text{si } x \leq -3 \\ \sqrt{9-x^2}; & \text{si } -3 < x < 3 \\ x; & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 5; & \text{si } x \leq -1 \\ (x-2)^2; & \text{si } -1 < x < 2 \\ -x+2; & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{9-x^2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ |x|, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{si } x < -4 \\ -\sqrt{-x}, & \text{si } -4 \leq x \leq 0 \\ |x|, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x < -3 \\ -(x-2)^2, & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ |x-1|, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < -9 \\ -\sqrt{-x}, & \text{si } -9 \leq x \leq -4 \\ 2|x|, & \text{si } x > -4 \end{cases}$$



SEMANA 05
TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

SESIÓN N°01
TEMA 08: TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

DEFINICIÓN:

Desplazamientos vertical y horizontal

Sea c un número real positivo. Los **desplazamientos vertical y horizontal** en la gráfica de $y = f(x)$ están representados como sigue.

1. Desplazamiento vertical c unidades *hacia arriba*: $h(x) = f(x) + c$
2. Desplazamiento vertical c unidades *hacia abajo*: $h(x) = f(x) - c$
3. Desplazamiento horizontal c unidades *a la derecha*: $h(x) = f(x - c)$
4. Desplazamiento horizontal c unidades *a la izquierda*: $h(x) = f(x + c)$

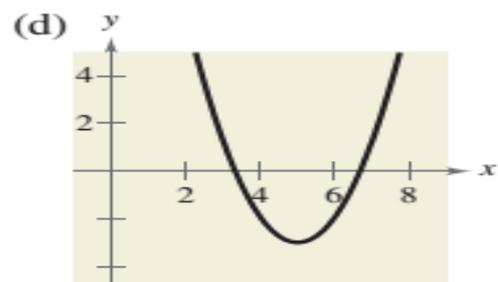
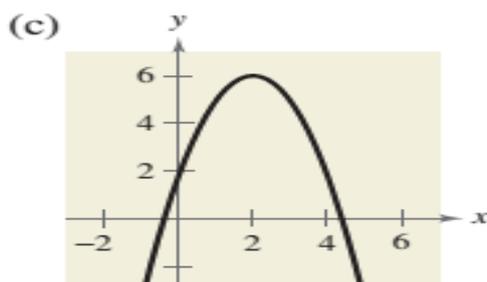
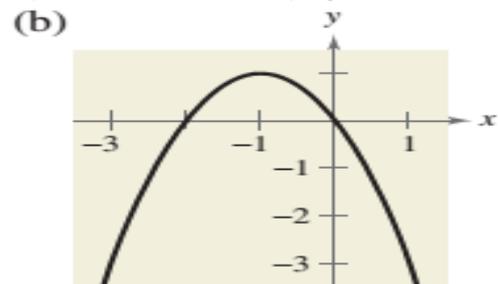
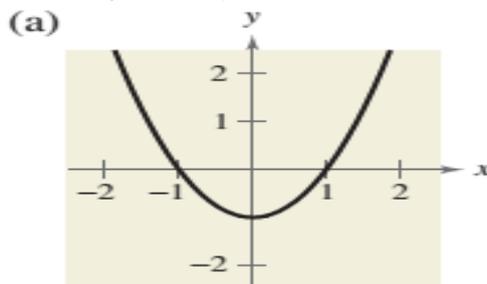
Reflexiones en los ejes de coordenadas

Las **reflexiones** en los ejes de coordenadas de la gráfica de $y = f(x)$ están representadas como sigue.

1. La reflexión en el eje x : $h(x) = -f(x)$
2. La reflexión en el eje y : $h(x) = f(-x)$

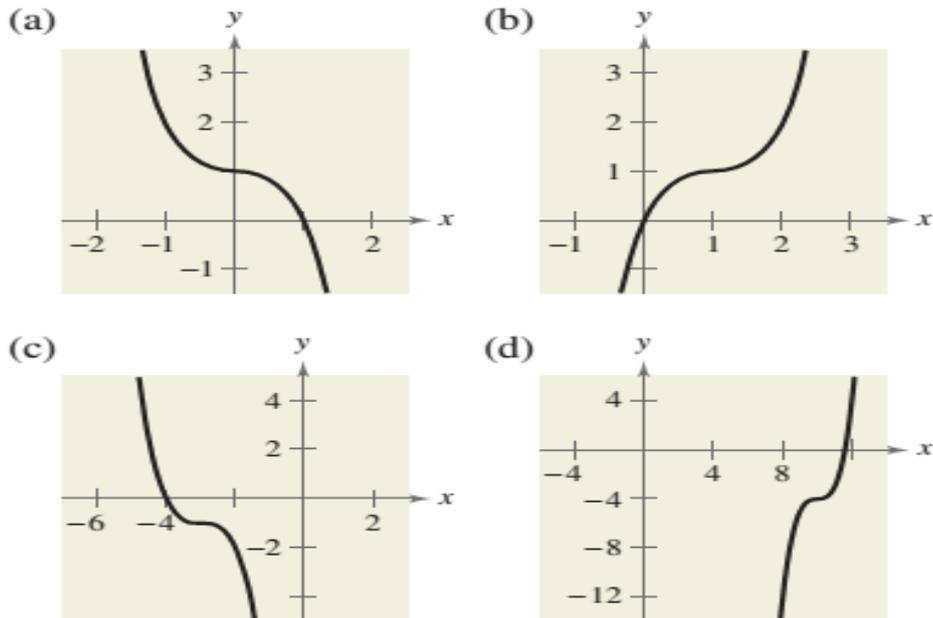
A. BLOQUE I

1. Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

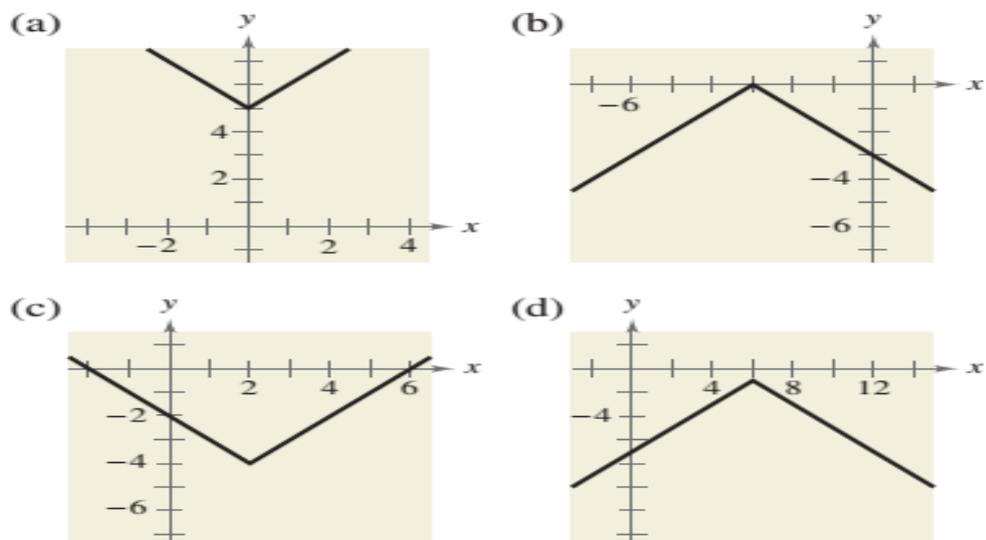




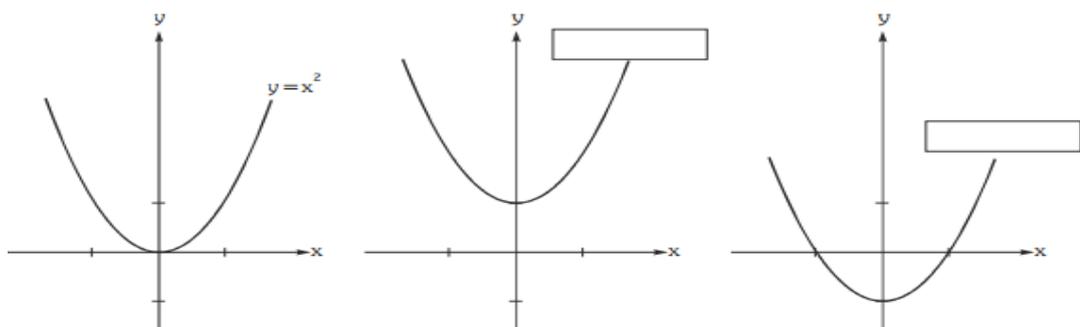
2. Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.



3. Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

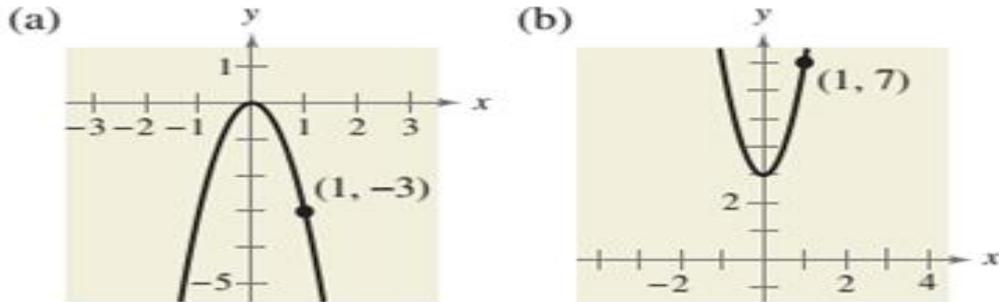


4. A partir de $f(x)=x^2$, se obtienen las siguientes gráficas que se muestran abajo, complete los espacios en blanco las ecuaciones del tipo desplazamiento ocurridos.





5. A partir de $f(x)=x^2$, se obtienen las siguientes gráficas que se muestran abajo, complete los espacios en blanco las ecuaciones del tipo desplazamiento ocurridos.

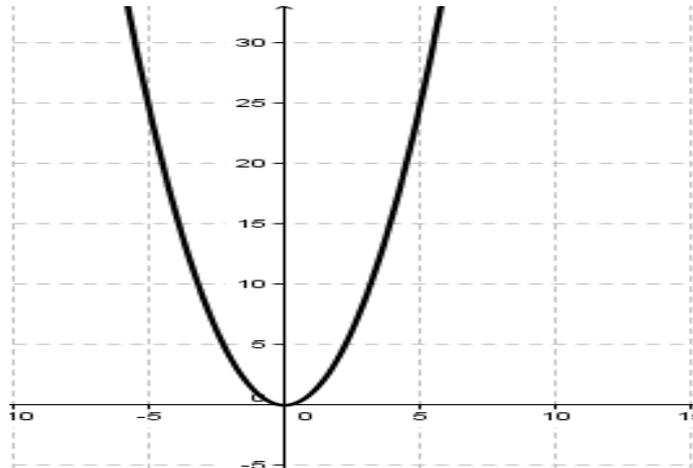


6. A partir de $f(x)=x^2$, se obtienen las siguientes gráficas que se muestran abajo, complete los espacios en blanco las ecuaciones del tipo desplazamiento ocurridos.



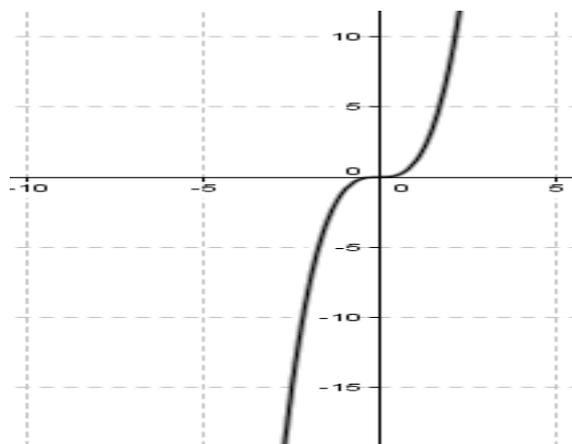
7. A partir de $f(x)=x^2$, graficar las siguientes funciones.

- a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = x^2 - 2$



8. A partir de $f(x) = x^3$, graficar las siguientes funciones

- a) $f(x) = x^3 + 2$
b) $f(x) = x^3 - 3$
c) $f(x) = (x - 4)^3$

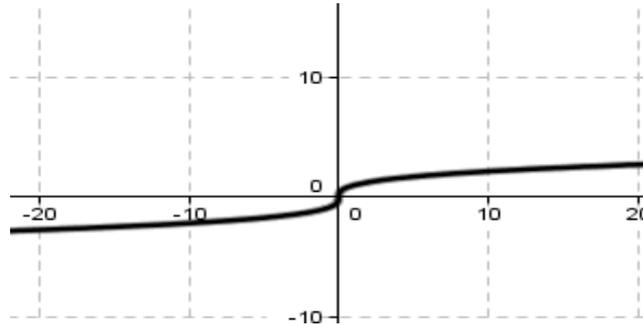




9. A partir de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, graficar las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 3$

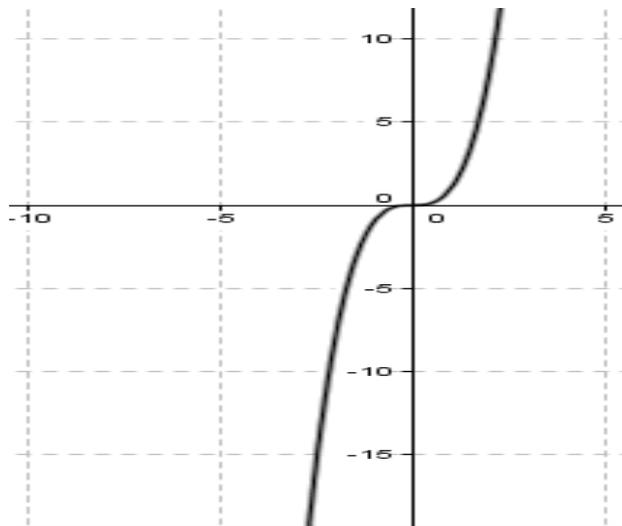


10. A partir de $f(x) = x^3$, graficar las siguientes funciones

a) $f(x) = (x + 1.5)^3$

b) $f(x) = (x + 3)^3 + 3$

c) $f(x) = (x - 2)^3 - 5$



B. BLOQUE II

Graficar mediante transformaciones las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^2 - 1$

2. $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)^2 + 1$

3. $f(x) = -2(x + 1)^2 - 4$

4. $f(x) = -3(x - 1)^2 - 4$

5. $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 1)^3 + 1$

6. $f(x) = -2(x - 1)^3 - 2$

7. $f(x) = -3(x + 1)^3 - 3$

8. $f(x) = -\sqrt[3]{x - 1} + 3$

9. $f(x) = -3\sqrt[3]{x + 1} - 2$

10. $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x + 1} - 2$



C. BLOQUE III:

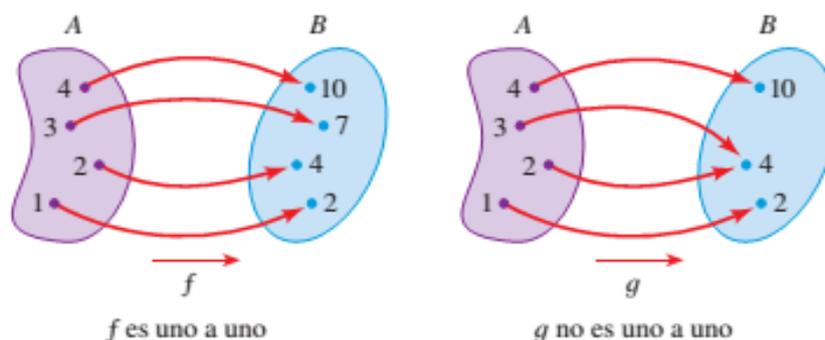
1. Si $f(x) = \sqrt{x}$ alargue verticalmente con factor 2, **refleje en el eje** y Desplace 4 unidades hacia la derecha, Desplace 3 unidades hacia arriba.
2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ Desplace 4 unidades hacia la derecha , Desplace 2 unidades hacia arriba, alargue verticalmente por un factor 3 , refleje en el eje x.
3. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Desplace 2 unidades hacia la izquierda , Desplace 5 unidades hacia arriba ,alargue verticalmente por un factor 3 , refleje en el eje x.
4. Si $f(x) = |x|$ Desplace 1 unidades hacia la derecha , Desplace 5 unidades hacia abajo , acorte verticalmente por un factor $\frac{1}{2}$, refleje en el eje x.
5. Si $f(x) = x^2$ Desplace 4 unidades hacia la izquierda , alargue verticalmente por un factor 2 , desplace hacia arriba 5 unidades.
6. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$ refleje en el eje y Desplace 1 unidades hacia la derecha , desplace hacia abajo 3 unidades ,alargue verticalmente por un factor 4.
7. Si $f(x) = \sqrt{x}$ Desplace 3.5 unidades hacia la izquierda , desplace hacia arriba 2 unidades ,alargue ,verticalmente por un factor 3 , unidades refleje en el eje y.
8. Si $f(x) = |x|$ Desplace 2 unidades hacia la derecha , acorte verticalmente por un factor $\frac{1}{4}$, refleje en el eje x.
9. Si $f(x) = x^2$ Desplace 3 unidades hacia la izquierda , alargue verticalmente por un factor 2 , desplace hacia arriba 5 unidades, refleje en el eje x.
10. Si $f(x) = |x|$ Desplace 2 unidades hacia la derecha , acorte verticalmente por un factor 5 , refleje en el eje x.

SEMANA 05
FUNCIONES INVERSAS

SESIÓN N°02
TEMA 09: FUNCIONES INVERSAS

▼ Funciones uno a uno

Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la Figura 1. Observe que f nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.



DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B . Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

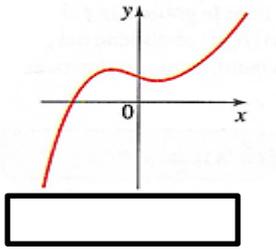
para cualquier y en B .



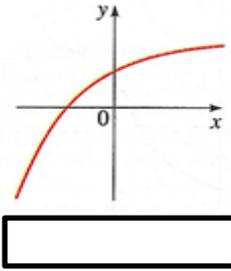
A. BLOQUE I

1. Se da la gráfica de una función f . Determine si " f " es uno a uno.

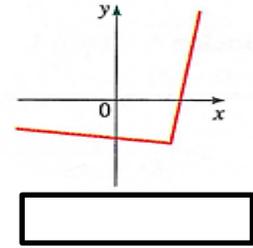
1.



2.



3.



Determine si la función es uno a uno.

4. $f(x) = -2x + 4$

5. $g(x) = \sqrt{x}$

6. $h(x) = x^2 - 2x$

7. $f(x) = x^4 + 5$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

9. $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

10. $f(x) = \frac{2x-1}{2x-3}$

B. BLOQUE II

Use la propiedad de función inversa para mostrar que f y g son inversas entre si.

1. $f(x) = x - 6$; $g(x) = x + 6$

2. $f(x) = 2x - 5$; $g(x) = \frac{x+5}{2}$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x}$

Grafique su función inversa

4. $f(x) = x^2 - 4$, $x \geq 0$

5. $g(x) = \sqrt{x+4}$, $x \geq -4$

6. $f(x) = \frac{x-5}{x-1}$, $x \neq 1$

7. $f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$, $x \neq 1$

8. $f(x) = \frac{3x-6}{x+3}$, $x \neq -3$

9. $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, $x \neq 2$

10. $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$, $x \neq -1$



SEMANA 05
FUNCIONES INVERSAS

SESIÓN N°03
TEMA 09: FUNCIONES INVERSAS Y SUS APLICACIONES

C. BLOQUE III

1. **Televisores de LCD:** Las ventas S (en millones de dólares) de televisores con pantalla de cristal líquido en Latinoamérica, de 2001 a 2007, se muestran en la tabla siguiente. El tiempo (en años) está dado por t , con $t = 1$ correspondiente a 2001.

Año, t	Ventas, $S(t)$
1	62
2	246
3	664
4	1579
5	3258
6	8430
7	14 532

- a) ¿ $S(t)$ es biunívoca?. Explique
- b) ¿Existe S^{-1} ?, si S^{-1} existe, ¿qué representa en el contexto del problema?
- c) Si S^{-1} existe, encuentre $S^{-1}(664)$
- d) Si la tabla se extiende a 2015 y si las ventas de televisores de pantalla de cristal líquido para ese año fueron de \$ 8 430 millones. ¿existiría S^{-1} ? Explique
2. **Función de demanda:** La cantidad vendida de un artículo se llama demanda del artículo. La demanda D para cierto artículo es una función del precio p dado por:

$$D(p) = -3p + 150$$

- a) Determine D^{-1} ¿Qué representa D^{-1} ?
- b) Determine $D^{-1}(30)$ ¿Qué representa su respuesta?
3. **Cuota por servicio.** Por sus servicios, un investigador privado requiere una cuota de retención de \$500 más \$80 por hora. Sea x el número de horas que el investigador pasa trabajando en un caso.
- a) Halle la función " f " que modela la cuota del investigador como una función de x .
- b) Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
- c) Encuentre $f^{-1}(1220)$. ¿Qué representa su respuesta?
4. **Salario por hora:** El salario de usted es \$10.00 por hora más \$0.75 por cada unidad producidas por hora. Por tanto, su sueldo " y " por hora en términos del número de unidades producidas x es:

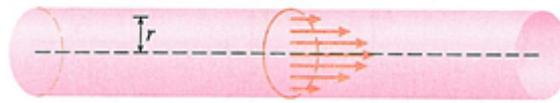
$$y = 10 + 0,75x$$

- a) Determine la función inversa ¿Qué representa cada variable en la función inversa?
- b) Determine el número de unidades producidas cuando su sueldo por hora es \$24.25.
5. **Flujo de sangre.** Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (ver figura). Para una arteria con radio 0.5 cm, v está dada como una función de r por:

$$V(r) = 18500 (0,25 - r^2)$$



- a) Encuentre V^{-1} . ¿Qué representa v^{-1} ?
- b) Determine $V^{-1}(30)$. ¿Qué representa su respuesta?



6. **Escalas de temperatura.** La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por:

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

- a) Encuentre F^{-1} . ¿Qué representa F^{-1} ?
 - b) Determine $F^{-1}(86)$. ¿Qué representa su respuesta?
7. **Impuesto sobre la renta.** En cierto país, el impuesto por ingresos menores o iguales que 20000 euros es 10%. Para ingresos de más de 20000 euros, el impuesto es de 2000 euros más 20% de la cantidad sobre 20000 euros.
- a) Encuentre una función "f" que proporcione el impuesto sobre la renta por un ingreso x.
 - b) Expresé f como una función definida por partes.
 - c) Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
 - d) ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de 10000 euros?
8. **Costo de una pizza.** Marcello's Pizza fijó como precio base de la pizza grande \$7 más \$2 por cada ingrediente. Por tanto, si usted ordena una pizza grande con x ingredientes, el precio lo dará la función: $f(x) = 7 + 2x$
- a) Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
 - b) Determine $f^{-1}(15)$. ¿Qué representa su respuesta?
9. **Tasas de intercambio:** El valor relativo de las monedas en circulación fluctúa a diario. Cuando este problema se escribió, un dólar canadiense valía 0,8159 dólares de Estados Unidos.
- a) Encuentre una función f que dé el valor del dólar de Estados Unidos $f(x)$ de x dólares canadienses.
 - b) Determina f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
 - c) ¿Cuánto dinero canadiense valdría \$12250 dólares de Estados Unidos?

10. **Ley de Torricelli:** Un recipiente contiene 100 galones de agua, que salen de una fuga en el fondo, lo que causa que el recipiente se vacíe en 40 minutos. La ley de Torricelli proporciona el volumen de agua que permanece en el recipiente después de t minutos como:

$$V(t) = 100 \left(1 - \frac{t}{40} \right)^2$$

- a) Encuentre V^{-1} . ¿Qué representa V^{-1} ?
- b) Determine $V^{-1}(15)$. ¿Qué representa su respuesta?

SEMANA 06
FUNCIONES CUADRÁTICAS

SESIÓN N°01
TEMA10: FUNCIONES CUADRÁTICAS

Graficación de funciones cuadráticas usando la forma estándar

Una **función cuadrática** es una función f de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

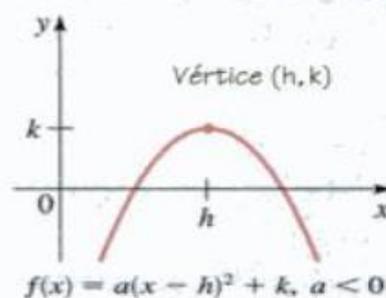
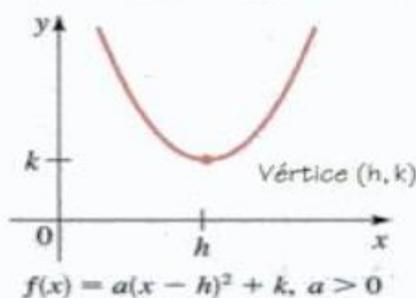
donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$.

Forma estándar de una función cuadrática

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k) ; la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



Hallar valores mínimo y máximo

Muchas aplicaciones suponen hallar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Al completar el cuadrado de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede reescribir la función en forma normal (vea Ejercicio 95).

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \quad \text{Forma estándar}$$

Por tanto, el vértice de la gráfica de f es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, lo cual implica lo siguiente.

Valores mínimo y máximo de funciones cuadráticas

Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vértice $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

1. Si $a > 0$, f tiene un *mínimo* en $x = -\frac{b}{2a}$. El valor mínimo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
2. Si $a < 0$, f tiene un *máximo* en $x = -\frac{b}{2a}$. El valor máximo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.



APLICACIONES DE FUNCIONES CUADRÁTICAS:

1. En una tienda donde se venden calculadoras se ha encontrado que cuando las calculadoras se venden en un precio de p dólares por unidad, el ingreso R como una función del proceso p es:

$$R(p) = -750p^2 + 15000p$$

¿Cuál debe ser el precio unitario para poder maximizar el ingreso? Si se cobra ese precio, ¿Cuál será el ingreso máximo?

2. **INGRESO:** Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierto artículo está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo y cuantas unidades se tienen que fabricar para obtener ese máximo?

3. **PRODUCTOS FARMACÉUTICOS:** Cuando cierto fármaco se toma oralmente, su concentración en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$ donde $0 \leq t \leq 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la concentración máxima y cuál es esa concentración máxima?

4. **TRAYECTORIA DE UN CLAVADISTA:** La trayectoria de un clavadista está dada por:

$$y = -\frac{8}{18}x^2 + \frac{48}{18}x + 12$$

Donde "y" es la altura (en pies) y "x" es la distancia horizontal desde el extremo del trampolín (en pies). ¿Cuál es la máxima altura del clavadista?

5. **ALTURA DE UNA PELOTA:** La altura y (en metros) de un balón pateado está dada por:

$$y = -\frac{16}{2025}x^2 + \frac{9}{5}x + 1.5$$

donde "x" es la distancia horizontal (en metros) desde el punto en el que el balón es pateado.

- a) ¿A qué altura está el balón cuando es pateado?
b) ¿Cuál es la máxima altura de la patada?
c) ¿Qué tan larga es la patada?
6. **COSTO MINIMO:** Un fabricante de accesorios para iluminación tiene costos diarios de producción expresados por:

$$C = 800 - 10x + 0.25x^2$$

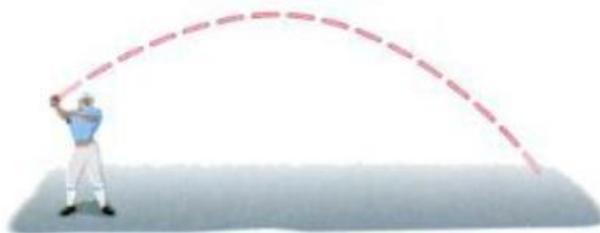
donde C es el costo total (en soles) y x es el número de unidades producidas. ¿Cuántos accesorios deben ser producidos cada día para dar un costo mínimo?

7. **UTILIDAD MAXIMA:** La utilidad P (en cientos de soles) que gana una compañía depende de la cantidad x (en cientos de soles) que gasta en publicidad, de acuerdo con el modelo:

$$P = 230 + 20x - 0.5x^2$$

¿Qué gasto en publicidad dará máxima utilidad?

8. **TRAYECTORIA DE UNA BOLA:** Se lanza una bola en un campo de juego. Su trayectoria esta dada por la ecuación $y = -0.005x^2 + x + 5$, donde x es la distancia que la bola ha viajado horizontalmente y " y " es la altura sobre el nivel del suelo, ambas medidas en pies.
- ¿Cuál es la altura maxima que alcanza la bola?
 - ¿Qué tan lejos ha viajado horizontalmente la bola cuando choca con el suelo?

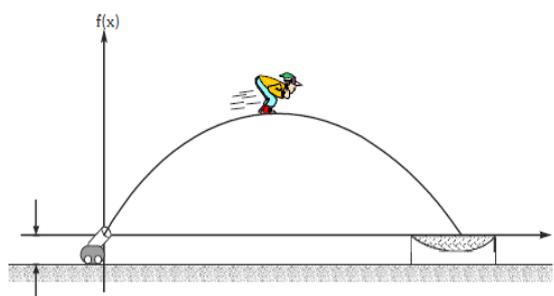


9. **PUBLICIDAD:** La efectividad de un comercial de televisión depende de cuantas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad " E " se mide en una escala de 0 a 10, entonces:

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

Donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima. ¿Cuántas veces lo debe ver un televidente?

10. La trayectoria que sigue un acróbata de circo cuando es disparado por un cañón está dada por la gráfica de la función: $f(x) = 2,5x - \frac{1}{20}x^2 + 4,5$ tanto el cañón como la malla están a 3 metros de altura (observa la figura).



- ¿A qué distancia del cañón debe estar el centro de la malla para que el acróbata caiga en ese lugar?
- ¿Cuál es la altura máxima, con respecto al suelo, que alcanza el acróbata?



SEMANA 06
FUNCIONES POLINOMIALES

SESIÓN N°02 y N°03
TEMA 11: FUNCIONES POLINOMIALES

Funciones polinomiales

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n , el coeficiente de la potencia más alta, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Es común referirse a las funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6 .

Diagram illustrating the polynomial $3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$ with labels:

- Grado 5
- Coeficiente principal 3
- Coeficiente constante -6
- Término principal $3x^5$
- Coeficientes 3, 6, -2 , 1, 7 y -6

Comportamiento extremo de polinomios

El comportamiento extremo del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ se determina por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n , como se indica en las siguientes gráficas.

P tiene grado impar

P tiene grado par

The graphs show the following end behaviors:

- Grado impar, Coeficiente principal positivo:** $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ and $y \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.
- Grado impar, Coeficiente principal negativo:** $y \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ and $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.
- Grado par, Coeficiente principal positivo:** $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ and $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.
- Grado par, Coeficiente principal negativo:** $y \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ and $y \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

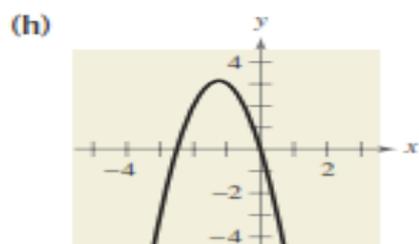
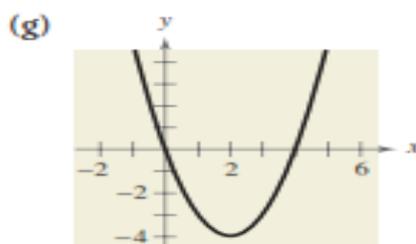
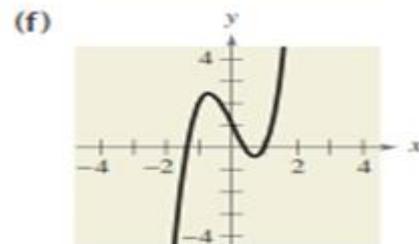
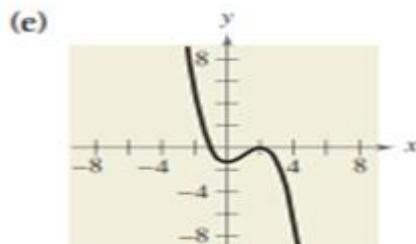
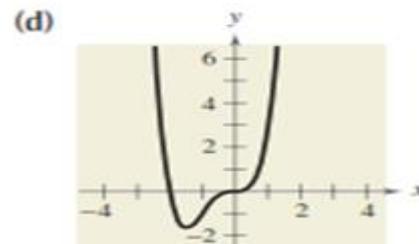
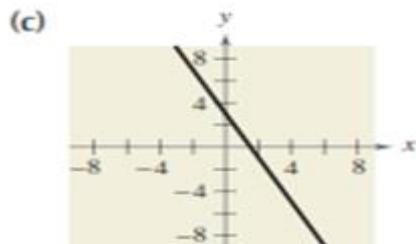
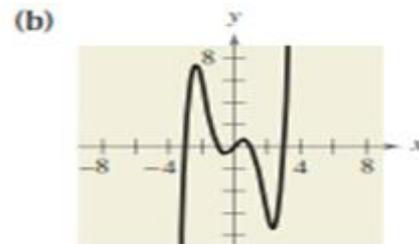
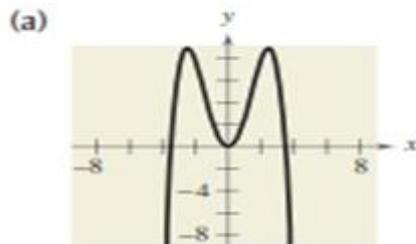


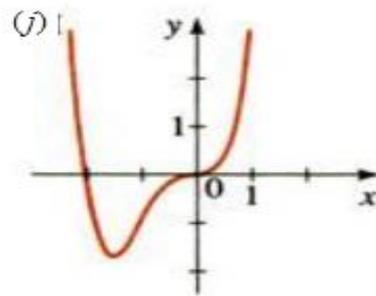
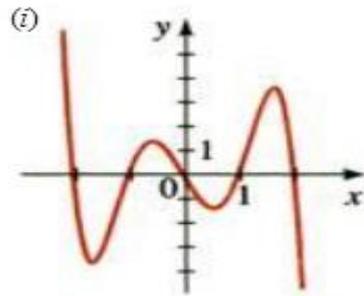
Normas para graficar funciones polinomiales

- 1. Ceros.** Factorizar el polinomio para hallar todos sus ceros reales; estos son las intersecciones con el eje x de la gráfica.
- 2. Puntos de prueba.** Construir una tabla de valores para el polinomio. Incluir los puntos de prueba para determinar si la gráfica del polinomio yace arriba o abajo del eje x en los intervalos determinados por ceros. Incluya la intersección y en la tabla.
- 3. Comportamiento extremo.** Determine el comportamiento extremo del polinomio.
- 4. Gráfica.** Trace las intersecciones y otros puntos que encontró en la tabla. Bosqueje una curva lisa que pase por estos puntos y exhiba el comportamiento extremo requerido

A. BLOQUE I

En los ejercicios del 1 al 10, relacione la función polinomial con su gráfica. Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i) y (j)





1. $f(x) = -2x + 3$
2. $f(x) = x^2 - 4x$
3. $f(x) = -2x^2 - 5x$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$
5. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$
6. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}$
7. $f(x) = x^4 + 2x^3$
8. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + \frac{9}{5}x$
9. $f(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$
10. $f(x) = x^4 + 2x^3$

B. BLOQUE II

Factorice el polinomio, halla los ceros, bosqueje la gráfica y determine el comportamiento extremo:

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$
2. $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$
3. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$
4. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$
5. $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$
6. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$
7. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$
8. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$
9. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
10. $P(x) = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)^2$

C. BLOQUE III

Factorice el polinomio y use la forma factorizada para hallar los ceros y trace la gráfica de la función polinomial.



1. $P(x) = x^2 + 10x + 25$
2. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
3. $P(x) = x^4 - x^3 - 30x^2$
4. $P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x$
5. $P(x) = t^5 - 6t^3 + 9t$
6. $P(x) = x^5 + x^3 - 6x$
7. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 25x + 100$
8. $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$
9. $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$
10. $P(x) = t^3 - 8t^2 + 16t$

SEMANA 07
FUNCIONES RACIONALES

SESIÓN del N° 01 y N°03
TEMA12: FUNCIONES RACIONALES

Asíntotas verticales y horizontales de una función racional

Sea f la función racional dada por

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ no tienen factores comunes.

1. La gráfica de f tiene asíntotas *verticales* en los ceros de $D(x)$.
2. La gráfica de f tiene una asíntota *horizontal*, o ninguna, determinada al comparar los grados de $N(x)$ y $D(x)$.
 - a. Si $n < m$, la gráfica de f tiene la recta $y = 0$ (el eje x) como asíntota horizontal.
 - b. Si $n = m$, la gráfica de f tiene la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ (razón entre los coeficientes principales) como asíntota horizontal.
 - c. Si $n > m$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

A. BLOQUE I

En los ejercicios del (1-20); (a) Identifique las Intersecciones con los ejes coordenados, (b) Encuentre las ecuaciones de las Asíntotas Verticales y Horizontales, (c) Trazar la gráfica de la función racional.



1. $f(x) = \frac{1}{x+2}$
2. $f(x) = \frac{1}{x-3}$
3. $h(x) = \frac{-1}{x+4}$
4. $g(x) = \frac{1}{6-x}$
5. $C(x) = \frac{7+2x}{2+x}$
6. $P(x) = \frac{1-3x}{1-x}$
7. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+9}$
8. $f(t) = \frac{1-2t}{t}$
9. $g(s) = \frac{4s}{s^2+4}$
10. $f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$
11. $h(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$
12. $g(x) = \frac{x^2-2x-8}{x^2-9}$
13. $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x^3-2x^2-x+2}$
14. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-5x+6}$
15. $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+x-6}$
16. $f(x) = \frac{5(x+4)}{x^2+x-12}$
17. $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{2x^2-x-6}$
18. $f(x) = \frac{3x^2-8x+4}{2x^2-3x-2}$
19. $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$
20. $f(x) = \frac{x^2-36}{x+6}$

B. BLOQUE II

Encuentre intersecciones con los ejes X e Y, ecuaciones de las asíntotas y trace la gráfica.

1. $f(x) = \frac{5+x}{5-x}$
2. $f(x) = \frac{3-7x}{3+2x}$
3. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
4. $f(x) = \frac{4x^2}{x+2}$
5. $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+x+9}$
6. $f(x) = \frac{3x^2+x-5}{x^2+1}$



$$7. r(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x}$$

$$8. r(x) = \frac{3x - x^2}{2x - 2}$$

$$9. r(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x - 3}$$

$$10. r(x) = \frac{x^3 + 4}{2x^2 + x - 1}$$

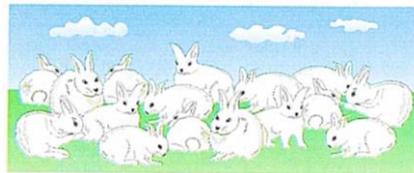
C. BLOQUE III

1. **Crecimiento poblacional.** Suponga que la población de conejos de la granja del señor Jenkins sigue la fórmula:

$$P(t) = \frac{3000t}{t + 1}$$

Donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el comienzo del año.

- Trace una gráfica de la población de conejos.
- ¿Qué sucede finalmente con la población de conejos?



2. **Concentración del fármaco.** Se monitorea la concentración de fármacos en el torrente sanguíneo de un paciente al que le fueron administrados fármacos en el instante $t \geq 0$ (en horas desde la administración del fármaco), la concentración (en mg/L) se determina por:

$$C(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

Indique la función "C" con un dispositivo de graficación

- ¿Cuál es la concentración más alta del fármaco que se alcanza en el torrente sanguíneo del paciente?
 - ¿Qué sucede con la concentración del fármaco después de un periodo largo?
 - ¿Cuánto le toma a la concentración disminuir debajo de 0.3 mg/L?
3. **El efecto Doppler.** Cuando un tren se mueve hacia un observador (véase la figura), el tono de su silbato suena más alto para el observador que si el tren estuviera en reposo, porque las ondas sonoras están más cerca unas de otras. Este fenómeno se llama efecto Doppler. El tono P observado es una función de la velocidad v del tren y se expresa como:

$$P(v) = P_0 \left(\frac{s_0}{s_0 - v} \right)$$

Donde: P_0 es el tono real del silbato en la fuente y $s_0 = 332$ es igual a la velocidad del sonido en el aire. Suponga que un tren tiene un silbato establecido de $P_0 = 440\text{HZ}$. Grafique la función $y = P(v)$ por medio de un dispositivo de graficación. ¿Cómo se puede interpretar físicamente la asíntota vertical esta función?



Unidad III

FUNCIÓN EXPONENCIAL y LOGARÍTMICA

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de, resolver ejercicios y problemas de aplicación de funciones exponenciales y logarítmicas, utilizando de manera comprensiva el lenguaje algebraico para expresar situaciones problemáticas cotidianas.



SEMANA 09
FUNCIONES EXPONENCIALES

SESIÓN N° 03
TEMA13: FUNCIONES EXPONENCIALES

Definición de función exponencial

La función exponencial f con base a se denota por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es cualquier número real.

A. BLOQUE I

Use una calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

1. $f(x) = 4^x$; $f(0.5)$; $f(\sqrt{2})$; $f(\pi)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$

2. $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$; $g(1.3)$; $g(\sqrt{5})$; $g(2\pi)$; $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

Bosqueje la gráfica de la función construyendo una tabla de valores. Use una calculadora si es necesario.

3. $f(x) = 2^x$

4. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

5. $g(x) = 3e^x$

Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

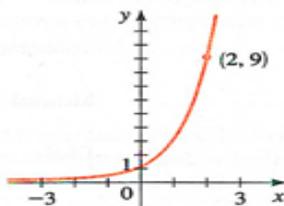
6. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

7. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$

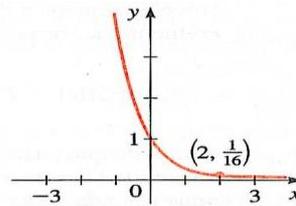
8. $f(x) = 3^{x-1}$ y $g(x) = 6^x$

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se muestra

9.



10.

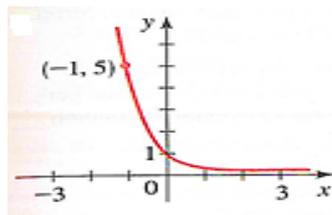


B. BLOQUE II

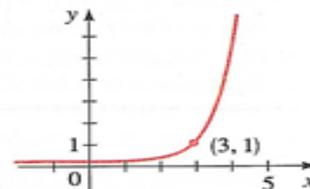
1. Compare la función exponencial con una de las gráficas marcadas I-VI

- a) $f(x) = 5^x$ b) $f(x) = 5^{-x}$ c) $f(x) = 5^{x-3}$

I.-

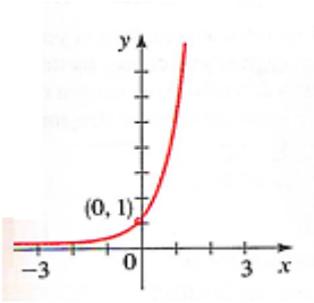


II.-

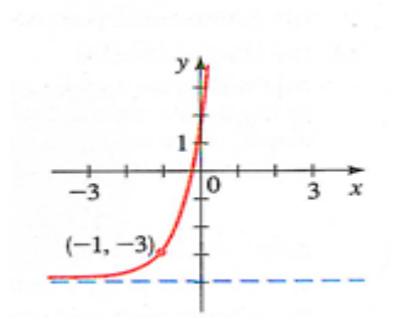




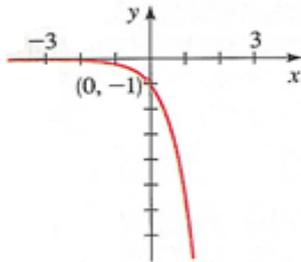
III.-



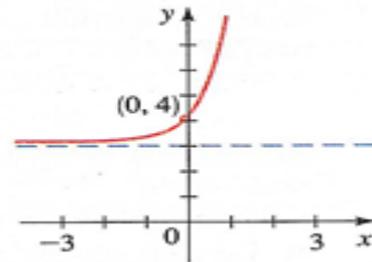
IV.-



V.-



VI.-



Grafique la función.

2. $f(x) = -3^x$

3. $g(x) = 2^x - 3$

4. $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

5. $f(x) = 10^{x+3}$

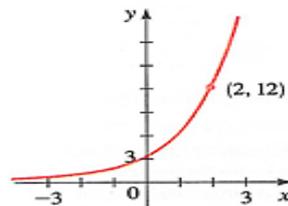
6. $f(x) = -e^x$

7. $y = e^{-x} - 1$

8. $f(x) = e^{x-2}$

9. Bosqueje las gráficas de $f(x)=2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$

10. Encuentre la función de la forma $f(x) = Ca^x$, cuya gráfica es la siguiente:



C. BLOQUE III

1. Decaimiento radioactivo. Una sustancia radiactiva se desintegra de tal manera que la cantidad de masa que permanece después de t días se expresa mediante la función.

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

Donde: $m(t)$ se mide en kilogramos

a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$

b) ¿Cuánta masa permanece después de 45 días?

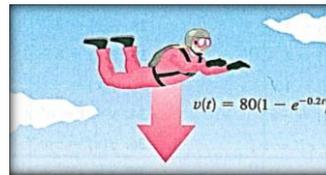


2. Paracaidismo. Un paracaidista salta desde una altura razonable del suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad de descenso del paracaidista en el tiempo "t" se expresa como:

$$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$$

Donde "t" se mide en segundos y v (t) se mide en pies por segundo (pies/s).

- Encuentre la velocidad inicial del paracaidista.
- Calcule la velocidad después de 5s y después de 10s.
- Dibuje la gráfica de la función de velocidad v(t).
- La velocidad máxima de un objeto que cae con resistencia del viento se llama su velocidad terminal. De la gráfica del inciso c) encuentre la velocidad terminal de este paracaidista.

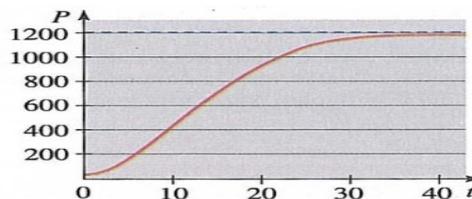


3. Crecimiento logístico. Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimento. En tales condiciones la población sigue un modelo de crecimiento logístico:

$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

Donde: c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces, en un pequeño estanque d = 1200 ; k = 11 ; c = 0.2 y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo t = 0.

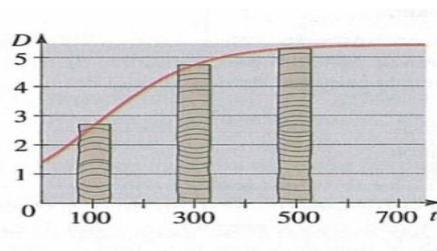
- ¿Cuántos peces se colocaron originalmente en el estanque?
- Calcule la población después de 10, 20 y 30 años.
- Evalúe P(t) para valores grandes de t. ¿A qué valor tiende la población cuando $t \rightarrow \infty$ la gráfica mostrada confirma sus cálculos?



4. Diámetro de un árbol. Para cierto tipo de árbol el diámetro D (en pies) depende de la edad del árbol t (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico:

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Determine el diámetro de un árbol de 20 años





5. Interés compuesto. Una inversión de 5000 dólares se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla llenando las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o las tasas de interés.

$$r = 4\%$$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

6. Interés compuesto. Si se invierten 10 000 dólares a una tasa de interés de 10% por año, capitalizable semianualmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
- a) 5 años
b) 10 años
c) 15 años
7. Interés compuesto. Si se invierten 3000 dólares a una tasa de interés de 9% por año, encuentre la cantidad de la inversión al final de 5 años para los siguientes métodos de capitalización.
- a) Anual
b) Semianual
c) Mensual
d) Semanal
e) Por día
f) Por hora
g) De manera continua
8. Interés compuesto. ¿Cuál de las tasas de interés dadas y períodos de capitalización proporcionarían la mejor inversión?
- a) $8\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizable cada medio año
b) $8\frac{1}{4}\%$ por año, capitalizable trimestralmente
c) 8% por año, capitalizable de forma continua

9. Fechado con carbono. La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de carbono 14 radioactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en año) se determina por:

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0 .

10. Inversión. El tiempo requerido para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés capitalizable de manera continua está dado por :

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Determine el tiempo requerido para duplicar una inversión en 6 por ciento y 8 por ciento.



SEMANA 10
FUNCIONES LOGARÍTMICAS

SESIÓN N° 01 y 02
TEMA14: FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Definición de función logarítmica con base a

Para $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

La función dada por

$$f(x) = \log_a x \quad \text{léase como "logaritmo base } a \text{ de } x".$$

se llama **la función logarítmica con base a** .

Propiedades de los logaritmos.

- $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.
- $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$ Propiedades inversas
- Si $\log_a x = \log_a y$, entonces $x = y$. Propiedad biunívoca

A. BLOQUE I

1. Complete la tabla con la forma exponencial y logarítmica apropiada de la ecuación, como se observa en el ejemplo.

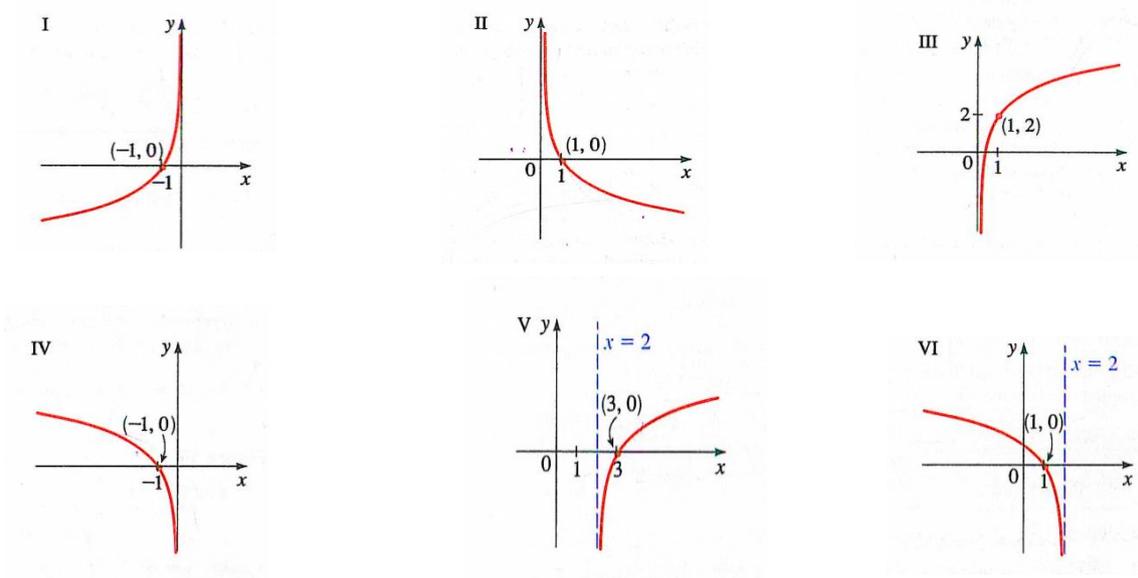
Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8 (\frac{1}{8}) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

2. Exprese la ecuación en forma exponencial.
- $\log_5 25 = 2$
 - $\log_5 1 = 0$
 - $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
 - $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
 - $\ln 5 = x$
 - $\ln y = 5$
3. Exprese la ecuación en forma logarítmica.
- $5^3 = 125$
 - $10^{-4} = 0.0001$
 - $8^{-1} = \frac{1}{8}$
 - $2^{-3} = \frac{1}{8}$
 - $e^x = 2$
 - $e^3 = y$
4. Evalúe la expresión.
- $\log_3 3$
 - $\log_3 1$
 - $\log_3 3^2$
 - $\log_3 36$
 - $\log_9 81$
 - $\log_7 7^{10}$
 - $\log_3 \frac{1}{27}$
 - $\log_{10} \sqrt{10}$
 - $\log_5 0.2$
 - $2^{\log_2 37}$
 - $3^{\log_3 8}$
 - $e^{\ln \sqrt{5}}$
 - $\log_8 0.25$
 - $\ln e^4$
 - $\ln \left(\frac{1}{e}\right)$
5. Use la definición de la función logarítmica para hallar "x"



- a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_2 16 = x$
c) $\log_3 243 = x$ d) $\log_3 x = 3$
e) $\log_{10} x = 2$ f) $\log_5 x = 2$
g) $\log_x 16 = 4$ h) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$
6. Use una calculadora para evaluar la expresión, correcta hasta 4 decimales.
a) $\log 2$ b) $\log 35.2$ c) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$
d) $\ln 5$ e) $\ln 25.3$ f) $\ln(1 + \sqrt{3})$
7. Compare la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I-VI.

- a) $f(x) = -\ln x$ b) $f(x) = 2 + \ln x$ c) $f(x) = \ln(2 - x)$



8. Dibuje la gráfica de $y = 4^x$, después utilice para dibujar la gráfica de $y = \log_4 x$
9. Grafique la función a partir de las gráficas iniciales. Expresé el dominio, rango y asíntota.
- a) $f(x) = \log_2(x - 4)$
b) $g(x) = \log_5(-x)$
c) $y = 2 + \log_3 x$
d) $y = 1 - \log_{10} x$
e) $y = |\ln x|$
10. Encuentre el dominio de la función.
- a) $f(x) = \log_{10}(x + 3)$
b) $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$
c) $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$



SEMANA 10
ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

SESIÓN N° 03
TEMA15: ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Fórmula de cambio de base

Sean a , b y x números reales positivos tales que $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Entonces $\log_a x$ se puede convertir a una base diferente como sigue.

Base b	Base 10	Base e
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Propiedades de los logaritmos

Sea a un número positivo tal que $a \neq 1$, y sea n un número real. Si u y v son números reales positivos, las siguientes propiedades son verdaderas.

	Logaritmo con base a	Logaritmo natural
1. Propiedad del producto:	$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$	$\ln(uv) = \ln u + \ln v$
2. Propiedad del cociente:	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$	$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$
3. Propiedad de la potencia:	$\log_a u^n = n \log_a u$	$\ln u^n = n \ln u$

Estrategias para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1. Reescriba la ecuación original en una forma que permita usar las propiedades biunívocas de funciones exponenciales o logarítmicas.
2. Reescriba una ecuación *exponencial* en forma logarítmica y aplique la propiedad inversa de las funciones logarítmicas.
3. Reescriba una ecuación *logarítmica* en forma exponencial y aplique la propiedad inversa de las funciones exponenciales.

A. BLOQUE I

Determine la solución de la ecuación exponencial, hasta cuatro decimales.

1. $10^x = 25$
2. $e^{-2x} = 7$
3. $e^{1-x} = 3$
4. $3e^x = 10$
5. $e^{1-4x} = 2$
6. $4 + 3^{5x} = 8$
7. $8^{0.4x} = 5$
8. $5^{-x/100} = 2$
9. $e^{2x+1} = 200$



10. $5^x = 4^{x+1}$

B. BLOQUE II

Determine la solución de la ecuación exponencial y logarítmica, hasta cuatro decimales.

1. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

2. $\frac{50}{1+e^{-x}} = 4$

3. $100(1.04^{2t} = 300)$

4. $x^2 2^x - 2^x = 0$

5. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$

6. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

7. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

8. $\ln x = 10$

9. $\log x = -2$

10. $\log(3x + 5) = 2$

C. BLOQUE III

Determine la solución de la ecuación logarítmica, hasta cuatro decimales.

1. $2 - \ln(3 - x) = 0$

2. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

3. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

4. $\log(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

5. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

6. $\log(x + 3) = \log x + \log 3$

7. $2^{\frac{2}{\log_5 x}} = \frac{1}{16}$

8. $2 \log(3x - 4) = \log 100 + \log(2x + 1)^2$

9. $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x + 1) = 2$

10. $\log(x - a) - \log(x + a) = \log x - \log(x - a)$



SEMANA 11
MODELADO DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

SESIÓN N° 01 y 02
TEMA16: MODELADO DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Introducción

Los cinco tipos más comunes de modelos matemáticos que contienen funciones exponenciales y logarítmicas son como sigue:

1. **Modelo de crecimiento exponencial:** $y = ae^{bx}$, $b > 0$
2. **Modelo de desintegración exponencial:** $y = ae^{-bx}$, $b > 0$
3. **Modelo de Gauss:** $y = ae^{-(x-b)^2/c}$
4. **Modelo de crecimiento logístico:** $y = \frac{a}{1 + be^{-rx}}$
5. **Modelos logarítmicos:** $y = a + b \ln x$, $y = a + b \log x$

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TASA DE CRECIMIENTO RELATIVA)

Una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ = población en el tiempo t

n_0 = tamaño inicial de la población

r = tasa de crecimiento relativa (expresada como una proporción de la población)

t = tiempo

A. BLOQUE I

Calcule el valor de "Y" $y = Ae^{kx}$, para los valores dados de A, k y x.

1. $A = 100$; $k = 0.75$; $x = 4$
2. $A = 25$; $k = 0.5$; $x = 10$
3. $A = 1000$; $k = -1.8$; $x = 2$
4. $A = 12.5$, $k = -0.04$, $x = 50$

Resuelva para k. Deje cada respuesta expresada en logaritmos naturales.

5. $5000 = 50e^{2k}$; 6. $75 = 150e^{10k}$; 7. $\frac{A}{3} = Ae^{4k}$; 8. $\frac{A}{2} = Ae^{100k}$

9. Se ha descubierto que una momia egipcia contiene el 60% de su ^{14}C (carbono 14). Con aproximación al siglo más cercano, ¿qué antigüedad tiene la momia? (Observación: si A es la

cantidad original de ^{14}C , la cantidad restante será $\frac{3}{5}A$.



10. Un esqueleto contiene la centésima parte de la cantidad original de ^{14}C (carbono 14). Aproximando el valor al milenio más cercano, ¿cuál es la antigüedad del esqueleto?

B. BLOQUE II

1. Cultivo de bacterias. El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función.

$$n(t) = 500e^{0.45t}$$

Donde t se mide en horas.

- ¿Cuál es el número inicial de la bacteria?
 - ¿cuál es la tasa relativa de crecimiento de esta población?
 - ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de tres horas?
 - ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10 000?
2. Un cultivo de bacterias crece de acuerdo con la fórmula $y = 10,000e^{0.6x}$, donde x es el tiempo, expresado en días. Calcule el número de bacterias que habrá después de 1 semana.
3. Calcule el número de bacterias que hay en el cultivo del Ejercicio 1, después de que ha proliferado durante 12 horas.
4. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que se triplique el cultivo de bacterias del ejercicio 2?
5. ¿Cuánto tiempo hará falta para que el número de bacterias del Ejercicio 2 llegue a 1,000,000?
6. Cierta sustancia radiactiva se descompone de acuerdo con la fórmula exponencial

$$S = S_0 e^{-0.04t}$$

Donde S_0 es la cantidad inicial de la sustancia y S es la cantidad de dicha sustancia que queda después de t años. Si al principio hay 50 gramos de la sustancia radiactiva, ¿cuánto tiempo se necesitará para que se descomponga la mitad?

7. Una sustancia radiactiva está desintegrándose de acuerdo con la fórmula $y = Ae^{kx}$, donde x es el tiempo, en años. Se tiene la cantidad inicial $A = 10$ gramos y, después de 5 años, quedan 8 gramos.
- Encuentre el valor de k . Deje la respuesta expresada en logaritmo natural.
 - Calcule la cantidad restante después de 10 años.
 - Calcule la vida media, aproximando hasta el décimo más cercano de un año.
8. La vida media del radio es de 1 690 años, aproximadamente. Un laboratorio tiene 50 miligramos de radio.
- Utilice la vida media al resolver para k la ecuación $y = Ae^{kx}$. Deje la respuesta expresada en logaritmo natural.
 - Aproximando a las decenas de años más cercanas, ¿cuánto tiempo se necesitará para que



sólo queden 40 miligramos?

9. Supongamos que 5 gramos de una sustancia radiactiva se descomponen a razón de 4 gramos por cada 30 segundos. ¿Cuál es su vida media, aproximada hasta la décima de segundo más cercana?
10. Cuando se estudió por primera vez el crecimiento demográfico de cierta ciudad, tenía una población de 22,000 habitantes. Se encontró que la población P , en función del tiempo (en años), crecía de acuerdo con la fórmula exponencial

$$P = (22,000)(10^{0,0163t})$$

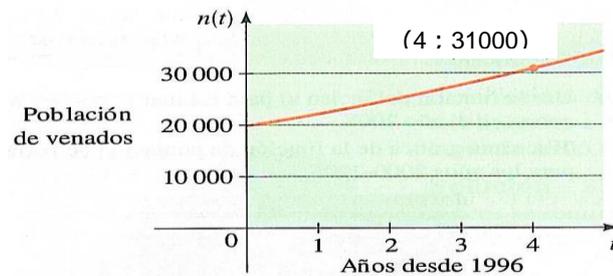
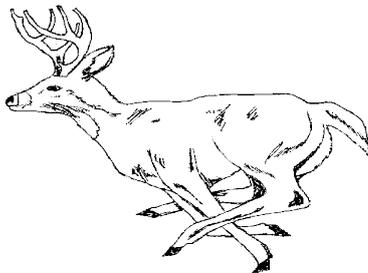
¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la población?

C. BLOQUE III

1. Si una población crece en forma exponencial y continua, dado un $r = 0,04$ ¿En cuánto tiempo se duplicará su población.
2. Una colonia de bacterias tiene una población inicial de 800.000 individuos y se duplica cada 3 horas. Se pide:
 - i. Escriba la ecuación que describe el crecimiento de la colonia por cada hora.
 - ii. Grafique esa función.
 - iii. ¿Qué población habrá después de 5 horas?
 - iv. ¿Cuántos nuevos individuos habrá entre la séptima y octava hora?
3. A causa de una profunda recesión económica una población decrece a razón de 1,5% cada año. En el inicio la población era de 350 000 habitantes. Suponga que la situación se mantiene por tres años ¿Cuál será la población en ese momento? (aproxime el resultado entero más próximo).
4. En un censo efectuado sobre una población de langostas sin superposición de generaciones, se encontraron 200 adultos por hectárea, al regresar al año siguiente, el censo dio como resultado 400 adultos por hectárea. ¿Puede estimar una tasa de crecimiento poblacional? ¿Cómo? ¿Cuántos individuos espera encontrar al cabo de 5 años si la tasa de crecimiento poblacional se mantiene constante? ¿En qué año espera encontrar 5000 individuos por hectárea?
5. Población de zorros. La población de zorros en cierta región tiene una tasa de crecimiento relativa de 8% por año. Se estima que la población en 2000 fue 18000.
 - a) Encuentre una función que modele la población t años después del año 2000.
 - b) Use la función del inciso a) para estimar la población de zorros en el año 2008.
 - c) Trace una gráfica de la función de población de zorros para los años 2000 - 2008.
6. Población de una ciudad. La población de cierta ciudad fue 112 000 en 1998, y la tasa de crecimiento relativa observada es 4% por año.
 - a) Encuentre una función que modele la población después de t años.
 - b) Encuentre la población proyectada en el año 2004.
 - c) ¿En qué año la población llega a 200 000?



7. Población de venados. En la gráfica se muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 1996 y 2000. Suponga que la población crece de forma exponencial.
- ¿Cuál es la población de venados en 1996?
 - Encuentre una función que modele la población de venados t años después de 1996.
 - ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2004?
 - ¿En qué año la población de venados llega a 100 000?



8. Cultivo de bacterias. Un cultivo comienza con 8600 bacterias. Después de una hora la cuenta es 10 000.
- Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.
 - Encuentre el número de bacterias después de dos horas.
 - ¿Después de cuántas horas se duplica el número de bacterias?
9. Población Mundial. La población del mundo fue 5.7 miles de millones en 1995 y la tasa de crecimiento relativa observada fue 2% al año.
- ¿En qué año se habrá duplicado la población?
 - ¿En qué año se habrá triplicado la población?
10. Bacterias infecciosas. Una cepa infecciosa de bacterias se incrementa a una tasa de crecimiento relativa de 200% por hora. Cuando cierta cantidad crítica de bacterias está presente en el torrente sanguíneo, una persona se enferma. Si una sola bacteria infecta a una persona, la concentración crítica se alcanza en 24 horas. ¿Cuánto tiempo toma alcanzar la concentración crítica si la persona es infectada con 10 bacterias?



Unidad IV

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas de una función trigonométrica utilizando instrumentos, técnicas y fórmulas en entornos formales y físicos.

SEMANA 11
MEDICIONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

SESIÓN N° 03
TEMA17: MEDICIÓN DE ÁNGULOS

1. Sistema Sexagesimal

Su unidad angular es el grado sexagesimal(1°); el cual es equivalente a la 360^{ava} parte del ángulo de una vuelta.

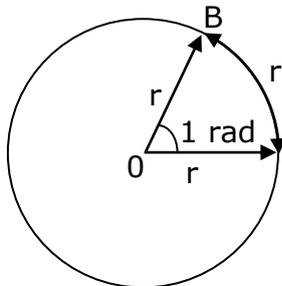
$$1^\circ = \frac{1V}{360} \rightarrow 1V \ 360^\circ$$

Equivalencias:

$1^\circ = 60'$	$1' = 60''$	$1^\circ = 3600''$
-----------------	-------------	--------------------

2. Sistema Radial o Circular o Internancional

Su unidad es el radian, el cual es un ángulo que subtende un arco de longitud equivalente al radio de la circunferencia respectiva.



$m\angle AOB = 1 \text{ rad}$

$$1 \text{ rad} = \frac{1V}{2\pi} \rightarrow 1V = 2\pi \text{ rad} \cong 6,2832$$

Nota
Como $\pi = 3,141592653\dots$

CONVERSION DE SISTEMAS

Factor de Conversión Es un cociente "conveniente" de dos magnitudes angulares equivalentes.

Magnitudes angulares equivalentes

- ✦ 1 vuelta : 1 v $360^\circ = 400^\circ = 2\pi \text{ rad}$
- ✦ Llano : 1/2v $180^\circ = 200^\circ = \pi \text{ rad}$
- Grados : $9^\circ = 10^\circ$

Ejemplos:

Convertir a radianes la siguiente magnitud angular $\alpha = 12^\circ$

Resolución:

Magnitud equivalente	Factor de Conversión
$\pi \text{ rad} = 180^\circ$	$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

$$\alpha = 12^\circ \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{15} \text{ rad}$$

2.1 Sistema Sexagesimal

Su unidad angular es el grado sexagesimal(1°); el cual es equivalente a la 360^{ava} parte del ángulo de una vuelta.

$$1^\circ = \frac{1V}{360} \rightarrow 1V \ 360^\circ$$

Equivalencias:

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^\circ = 3600''$$



A. BLOQUE I

Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida de grados sexagesimales dada.

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1. 72° | 2. -45° |
| 3. -85° | 4. 1080° |
| 5. 96° | 6. 7.5° |
| 7. 2.9° | 8. -150° |
| 9. 225° | 10. 720° |

Encuentre la medida en grados sexagesimales del ángulo con la medida en radianes dada.

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1. $\frac{7\pi}{6}$ | 2. $\frac{5\pi}{4}$ |
| 3. 3 | 4. -1.2 |
| 4. $\frac{\pi}{10}$ | 6. $\frac{2\pi}{15}$ |
| 7. $\frac{4\pi}{5}$ | 8. -5.3 |
| 9. -9.5 | 10. $\frac{11\pi}{5}$ |

B. BLOQUE II

Se da la medida de un ángulo en posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que son coterminal con el ángulo dado.

- 50°
- $\frac{3\pi}{4}$
- $-\frac{\pi}{4}$

Se dan las medidas de dos ángulos en posición estándar. Determine si los ángulos son coterminal.

- $70^\circ ; 430^\circ$
- $\frac{5\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6}$
- $155^\circ ; 875^\circ$

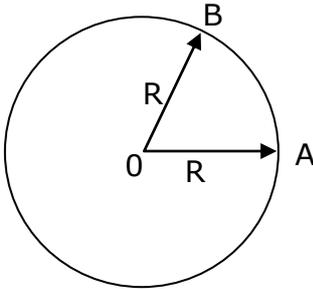
Encuentre el ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con el ángulo dado.

- 733°
- 1110°
- -800°
- -300°

Tema 17.1: ARCO Y SECTOR CIRCULAR

1. ARCO

Una porción cualquiera de una circunferencia, recibe el nombre de "Arco" de la circunferencia.



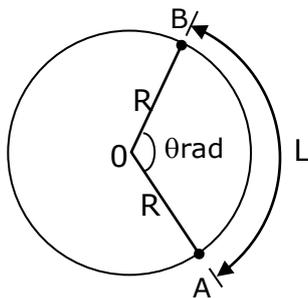
AB: Arco AB
A: Origen del arco AB
B: Extremo del arco AB
O: Centro de la circunferencia
R: Radio de la circunferencia

Amplitud

Dada por la medida del ángulo central que sostiene el arco.

Longitud de Arco

En una circunferencia de radio "R" un ángulo central de " θ " radianes determina una longitud de arco "L", que se calcula multiplicando el número de radianes " θ " y el radio de la circunferencia "R".

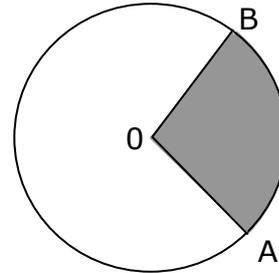


L: Longitud del arco AB
R: Radio de la circunferencia
 θ : N° de radianes del ángulo central ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

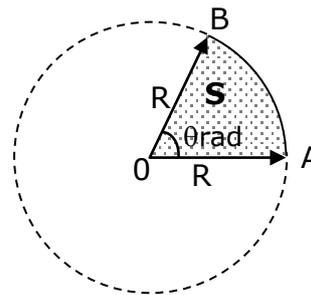
$$L = R \cdot \theta$$

2. SECTOR CIRCULAR

Se llama sector circular a la región circular limitada por dos radios y el arco correspondiente.



◁ AOB: Sector Circular AOB

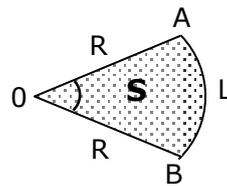


$$S = \frac{\theta R^2}{2}$$

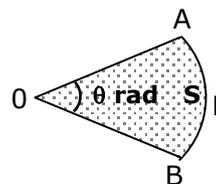
Donde:

S: Área del sector circular AOB

Otras fórmulas



$$S = \frac{L \cdot R}{2}$$



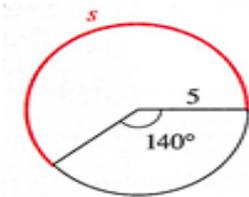
$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$



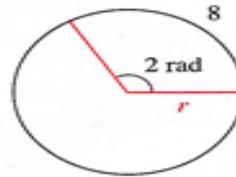
C. BLOQUE III

1. Encuentre lo siguiente en cada figura:

a) La longitud del arco "s".



b) Encuentre el radio "r" del círculo.



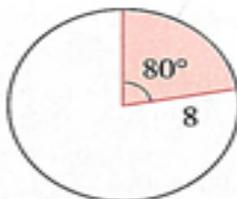
2. Encuentre la longitud de un arco que subtende a un ángulo central de 2 radianes en un círculo de radio 2.

3. Un arco de longitud 100 m subtende un ángulo central " θ " en un círculo de radio 50m. Encuentre la medida de " θ " en grados y radianes.

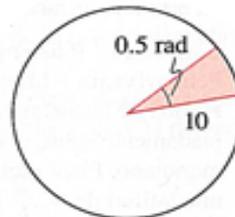
4. Determine el radio del círculo si un arco de longitud 6m en el círculo subtende un ángulo central de 135° .

5. Encuentre el área del sector mostrado en cada figura:

a)



b)



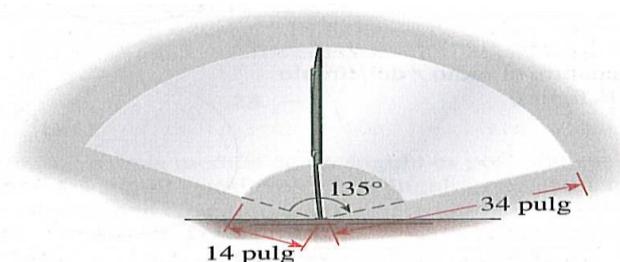
5. Encuentre el área de un sector con un ángulo central 1 radian en un círculo de radio 10 m.

6. El área de un sector de un círculo con un ángulo central de 2 radianes es 16 m^2 . Encuentre el radio del círculo.

7. El área de un círculo es 72 cm^2 . Encuentre el área de un sector de este círculo que subtende un ángulo central de $\frac{\pi}{6}$ radianes.

8. Distancia recorrida. Las ruedas de un automóvil miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué tan lejos viajara el automóvil (en millas) si sus ruedas giran 10 000 veces sin deslizamiento?

10. Limpia parabrisas. Los extremos superior e inferior de una hoja de limpia parabrisas están a 34 pulg y 14 pulg. Del punto central, respectivamente. Mientras está en operación el limpiador abarca 135° . Encuentre el área barrida por la hoja.



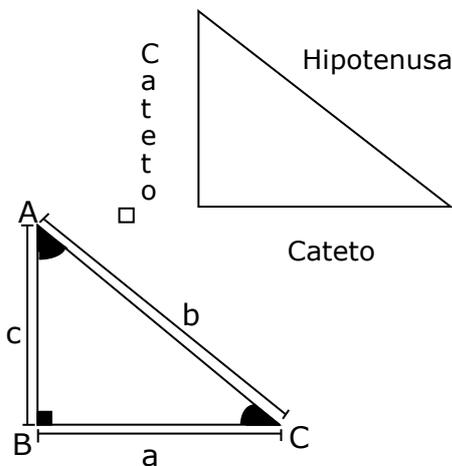
SEMANA 12
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

SESIÓN N° 01 y N° 02
TEMA18: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas son números que resultan de dividir dos lados de un triángulo rectángulo.

TRIANGULO RECTANGULO



Teorema de Pitágoras

“La suma de cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

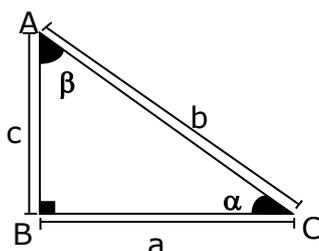
Teorema

“Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios”.

$$\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$$

2. DEFINICION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS PARA UN ANGULO AGUDO.

Dado el triángulo ABC, recto en “B”, según la figura, se establecen las siguientes definiciones para el ángulo agudo “ α ”:



$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cat.op.}}{\text{Hip.}} = \frac{c}{b} = \text{Cos } \beta$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cat.ady.}}{\text{Hip.}} = \frac{a}{b} = \text{Sen } \beta$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{Cat.op.}}{\text{Cat.ady.}} = \frac{c}{a} = \text{Ctg } \beta$$

$$\text{Ctg } \alpha = \frac{\text{Cat.ady.}}{\text{Cat.op.}} = \frac{a}{c} = \text{Tg } \beta$$

$$\text{Sec } \alpha = \frac{\text{Hip.}}{\text{Cat.ady.}} = \frac{b}{a} = \text{Csc } \beta$$

$$\text{Csc } \alpha = \frac{\text{Hip.}}{\text{Cat.op.}} = \frac{b}{c} = \text{Sec } \beta$$

Ejemplo:

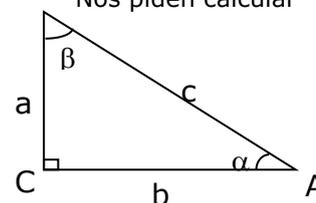
En un triángulo rectángulo ABC (recto en C), se sabe que la suma de catetos es igual “k” veces la hipotenusa. Calcular la suma de los senos de los ángulos agudos del triángulo.

Resolución:

Nótese que en el enunciado del problema tenemos:

$$a + b = k.c$$

Nos piden calcular



$$\text{Sen } \alpha + \text{Sen } \beta = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\text{Luego: } \text{Sen } \alpha + \text{Sen } \beta = \frac{k.c}{c} = k$$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

$$\begin{aligned}\text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta &= 1 \Rightarrow \text{Csc}\theta = \frac{1}{\text{Sen}\theta} \\ \text{Cos}\theta \cdot \text{Sec}\theta &= 1 \Rightarrow \text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta} \\ \text{Tan}\theta \cdot \text{Cot}\theta &= 1 \Rightarrow \text{Cot}\theta = \frac{1}{\text{Tan}\theta}\end{aligned}$$

CO-RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Seno} - \text{Coseno} \\ \text{Tangente} - \text{Cotangente} \\ \text{Secante} - \text{Cosecante} \end{array} \right.$$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Las razones trigonométricas de todo ángulo agudo, son respectivamente iguales a las co-razones trigonométricas de su complemento.

$$\begin{aligned}\text{Si:} \\ x+y=90^\circ, \text{ entonces se verifica} \\ \text{Sen}x &= \text{Cos}y \\ \text{Tan}x &= \text{Coty} \\ \text{Sec}x &= \text{Cscy}\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\text{Sen } 20^\circ = \text{Cos}70^\circ$$

$$\text{Tan } 40^\circ = \text{Cot } 50^\circ$$

$$\text{Cos } (x+20^\circ) = \text{Sen}(70^\circ-x)$$

$$\text{Sec } (30^\circ-2x) = \text{Csc}(2x+60^\circ)$$

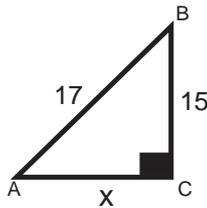
$$\text{Tan } (3x+70^\circ) = \text{Cot}(20^\circ-3x)$$

A. BLOQUE I

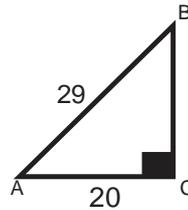
En cada uno de los siguientes ejercicios determine el valor de "x":



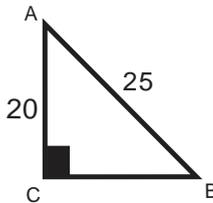
1. $x = AC$



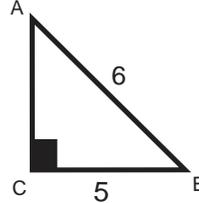
6. $x = \text{sen}A$



2. $x = \text{Tan}A \cdot \text{Cos}B$



7. $x = \text{Tan}A - \text{Cot}B$



3. $\text{Sen}x = \text{Cos}3x$

8. $\text{Tan}(3x - 20^\circ) = \text{Cot}(2x + 30^\circ)$

4. $\text{Sen}(x + 10^\circ) \text{Csc}3x = 1$

9. $\text{Sec}(3x + 50^\circ) \text{Cos}5x = 1$

5. $\text{Tan}16^\circ \cdot \text{Tan}(2x + 60^\circ) = 1$

10. $\text{Sen}(2x + 40^\circ) \cdot \text{Sec}(20^\circ + 2x) = 1$

B. BLOQUE II

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

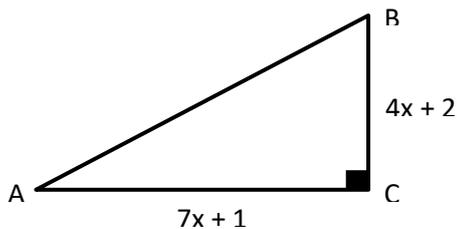
1. En un triángulo ABC recto en C simplificar: $E = a \text{Cot}A - c \text{Sen}B$

2. En un triángulo rectángulo ABC recto en B reducir: $E = (\text{Sec}A - \text{Sen}C) \cdot \text{Cot}A - \text{Cos}C$

3. En un triángulo rectángulo ABC recto en B se cumple que: $2 \text{Tan}A = \text{Csc}C$

Calcular: $E = 2 \text{Sen}A + \sqrt{3} \text{Tan}C$

4. Del gráfico determina el valor de "x". Si: $\text{Tan}B = \frac{3}{2}$



5. Si: $\text{Sec}x = \sqrt{7}$, determine el valor de: $E = \text{Tan}^2 x + \sqrt{42} \text{Sen}x$

6. Del gráfico determine:



$$E = \sqrt[3]{(\text{tg}\theta + \text{tg}\beta) \frac{\text{ctg}\alpha}{2}}$$

7. Si: $\text{Sen}7x \cdot \text{Sec}2x = 1$, determine: $E = \text{Tan}^2 6x + \text{Tan}(x + 42^\circ - y) \cdot \text{Tan}(3x + y + 8^\circ)$

8. Si: $\text{Cos}4x = \text{Sen}6y$, determine el valor de: $E = \frac{\text{sec}(3x + 2y) + \text{tg}(5x + y)}{\text{csc}(x + 4y) + \text{ctg}(5y - x)}$

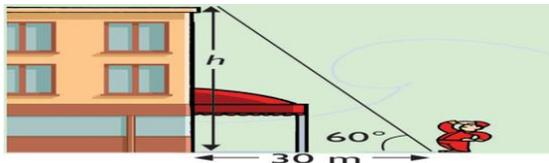


9. Si: $\text{Sen}(A - C) = \text{Cos}(B + C)$ Determine el valor de: $E = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{3}\right) + \text{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right)$
10. Si: $\text{Sen}(x + y) - \text{Cos}(z + 2y) = 0$; $\text{Cot}(2y - z) \cdot \text{Cot}43^\circ = \text{Tan}(x - y) \cdot \text{Tan}47^\circ$
- Determine el valor de: $0^\circ < y < x < 45^\circ$; $H = \text{Sec}\left(\frac{x}{2} - z\right)$

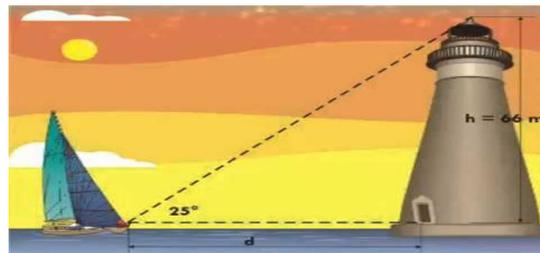
C. BLOQUE III:

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

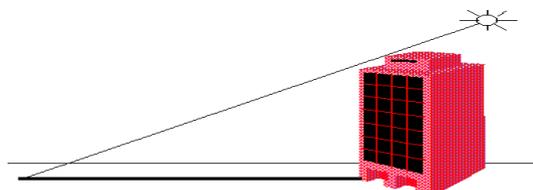
- Una escalera de 10 m. de longitud está apoyada sobre la pared de un edificio, El pie de la escalera dista 6 m. de la pared. ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera sobre la pared?
- Determine la altura de un triángulo equilátero de 14 cm. de lado.
- Determina la altura del edificio con los siguientes datos:



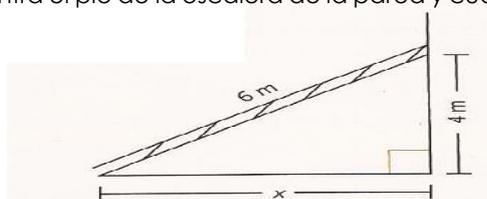
- Determina el valor de la hipotenusa teniendo en cuenta la altura del faro y el ángulo que se forma entre el faro y el barco.



- Desde un punto A en la orilla de un río se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos 100 metros río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el pino formando un ángulo de 30° con nuestra orilla. calcular la anchura del río.
- Un edificio proyecta una sombra de 140m. cuando el sol forma un ángulo de 25° sobre el horizonte, calcular la altura del edificio.

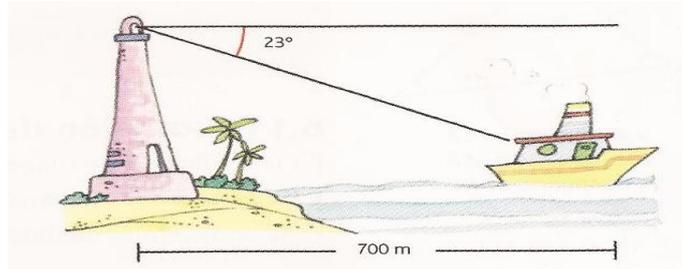


- Un cable está sujeto a un poste, formando un Angulo de 54° . Si el poste mide 5,3 metros cuanto medirá el cable.
- A que distancia se encuentra el pie de la escalera de la pared y cuanto mide el ángulo que forma la escalera con el suelo.

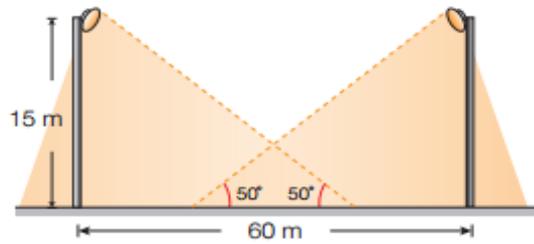




9. A partir del grafico mostrado determine la altura del faro.



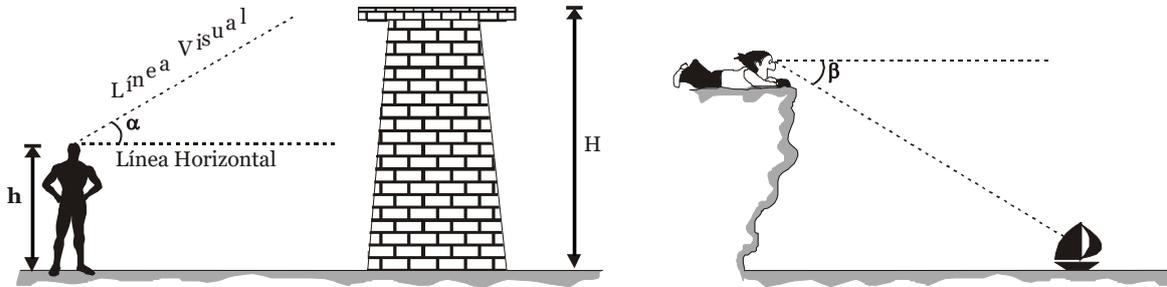
10. Dos postes de luz de 15 metros de altura ubicados a una distancia de 60 metros iluminan una calle como lo muestra la figura. Determina la longitud del segmento que queda iluminado por los dos postes.



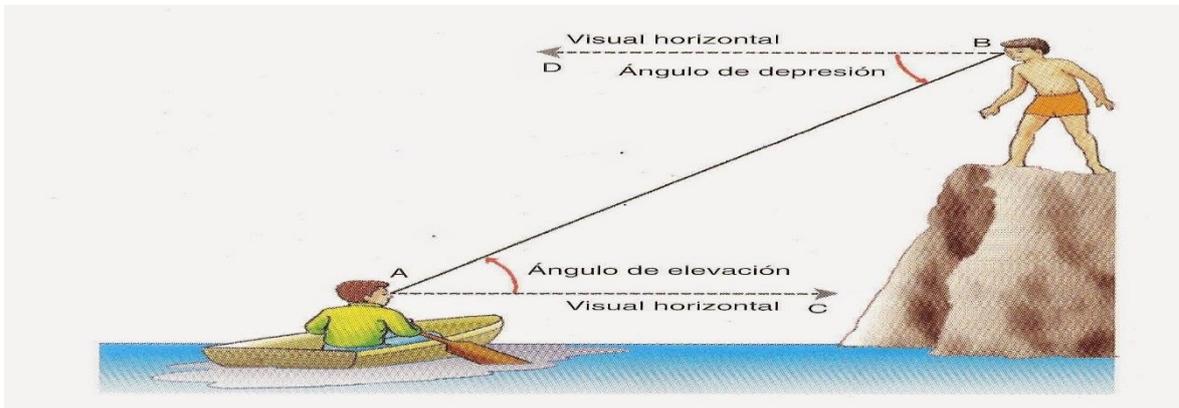


SEMANA 12
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

SESIÓN N° 03
Tema 19: APLICACIÓN DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO
(ÁNGULO DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN)



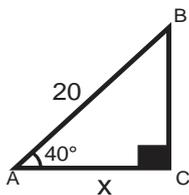
α : Ángulo de Elevación



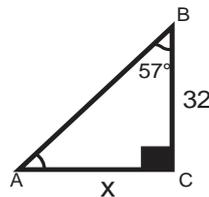
A. BLOQUE I

En cada uno de los siguientes ejercicios determine el valor de "x":

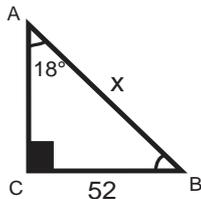
1. $x = AC$



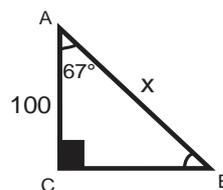
5. $x = AC$



2. $x = AB$

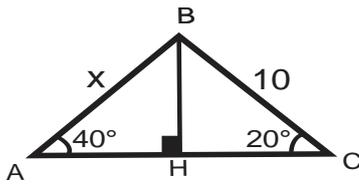


6. $x = AB$

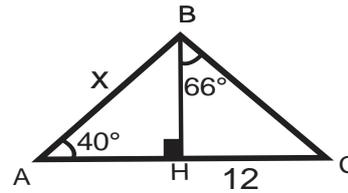


3. $x = AB$

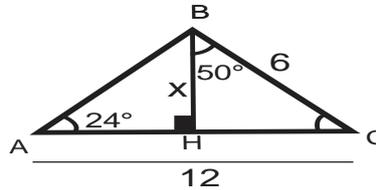
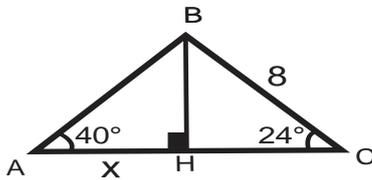
7. $x = AB$



4. $x = AH$



8. $x = BH$



9. Una persona de 1,60 m observa el asta de una bandera con un ángulo de elevación de 30° , si se encuentra a 3 m del pie de la asta ¿Qué altura tiene el asta de la bandera?
10. Desde una distancia de 48 metros de una pared se encuentra apoyada una escalera con un ángulo de 30° con respecto al pie de la escalera. A que altura se encuentra la escalera del suelo.

B. BLOQUE II

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

- Una persona determina que la elevación angular de una torre es de θ si avanza 6m. Hacia la torre su elevación es de 45° y acercándose 4m mas su elevación es de $90^\circ - \theta$. Determine la altura de la torre si la persona mide 2m.
- Para medir el ancho de un río un topógrafo se sitúa en una orilla y mira derecho a un árbol en la orilla opuesta. Luego el topógrafo camina 200 m por la orilla y vuelve a mirar el mismo árbol, con un ángulo de 3° . ¿Cuál es el ancho del río?
- Un avión que esta por aterrizar observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje de extensión igual al doble de la altura que se encuentra. Si ve al extremo más alejado con un ángulo de depresión de $22^\circ 30'$. Calcular el ángulo de depresión con que observa al otro extremo.
- Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 metros hacia el pie de la torre, su punto más alto se ve bajo un ángulo de 60° . Determina la altura de la torre.
- Una hormiga observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación θ . Cuando la distancia que los separa se ha reducido a la tercera parte, el nuevo ángulo de elevación se ha duplicado. Calcular θ
- Dos aviones se dirigen a un aeropuerto desde direcciones opuestas y a una misma altura. El piloto A informa que está a 2.5 km de la torre con un ángulo de elevación de $7^\circ 30'$. El piloto B informa que está a 5 km de la torre, ¿cuál es el ángulo de elevación?
- Desde lo alto de un acantilado de 21 m de altura se observa una boya en el mar con un ángulo de depresión de 16° . Calcular aproximadamente la distancia de la boya al pie del acantilado.
- Desde un punto en el suelo se observa la parte más alta de un edificio de 81 m. de altura con un ángulo de elevación cuya tangente es 1,8. ¿Qué distancia hay entre la base del edificio y el punto de observación?
- Un globo aerostático se encuentra entre dos pueblos que están separados 10km. Y los observa con ángulos de depresión de 37° y 53° . ¿A qué altura se encuentra volando el globo?



10. A 20 m. de un poste, se observa el foco de parte superior con un ángulo de elevación cuya tangente es 0,5 ¿Cuánto habrá que acercarnos al poste en la misma dirección para ver el foco con un ángulo de elevación que es el complemento del anterior?

C. BLOQUE III

1. Desde lo alto de una cima se observan los puntos "A" y "B" distantes a 20m. y 50 m. del pie de la cima con ángulo de depresión "x" e "y". Determine la altura de la cima., sabiendo que se cumple: $\text{Tan}x - \text{Tan}y = \frac{3}{10}$
2. Un niño de 1m de estatura se dirige hacia un edificio, en un instante dado se detiene y observa la azotea del edificio con un ángulo de elevación de 37° , luego avanza 7m y vuelve a observar el punto anterior con un ángulo de elevación de 45° . Calcule la altura del edificio.
3. En un globo de observación situado directamente encima de un lago, los instrumentos miden una altura de 600 m. El ángulo de depresión del globo en el cruce de dos carreteras es de 20° . Calcular la distancia desde el lago hasta el cruce de carreteras.
4. Un basquetbolista observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 37° , si la persona dista 8m. del árbol. Calcular el valor del ángulo de observación del árbol, sabiendo que la altura de la persona es la cuarta parte de la del árbol en mención.
5. Un pato que se encuentra sobre una laguna se percata de la presencia de un cazador a 14m, el ave alza vuelo en línea recta con un ángulo de 53° alejándose. El cazador hace un tiro certero con un ángulo de 37° . Calcular la distancia de vuelo del a ave antes de caer muerta.
6. Un árbol se encuentra sobre una ladera la cual tiene una inclinación de 23° con la horizontal. A una distancia de 30 m. colina abajo desde el pie del árbol, el ángulo de elevación hasta su parte superior es de 53° . Calcule la altura del árbol.
7. Un avión en picada, es observado desde un punto de tierra con un ángulo de elevación de 60° y una visual de 800 m, luego de pasar sobre dicho punto de observación es observado nuevamente desde dicho punto con un ángulo de elevación de 30° y una visual de 600 m. ¿Con que ángulo de inclinación, con respecto de la horizontal cae dicho avión?
8. Una cuerda elástica se mantiene unida a un poste y a tierra manteniéndole poste verticalmente. Al medio día un movimiento telúrico hace que el poste sufra una inclinación proyectando una sombra la cual es la mitad del poste. Si antes y después del temblor el ángulo formado por la cuerda y la tierra eran de 53° y θ . Calcular aproximadamente " $\text{Tan}\theta$ ".
9. Pepe observa la parte más alta de un faro con un ángulo de elevación " θ ", si se acerca hacia el faro a una distancia " d "m observa al punto anterior con un ángulo de elevación 2θ y a un punto que esta " x "m debajo y en la misma vertical del punto anterior con un ángulo de elevación θ . Determine el valor de " x ".
10. En el camino hacia la cima de una colina esa inclinada un ángulo " α " respecto a la horizontal. Si desde la cima se divisa un punto del plano horizontal que pasa por la base de la colina con un ángulo de depresión θ . Calcular la altura de la colina si dicho punto se encuentra a 180m. de la base de la colina. Además:

$$\text{Cot}\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \text{Cot}\theta = \frac{12}{5}$$



SEMANA 13
GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

SESIÓN N° 02 y N°03
Tema 20: GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO

1. **FUNCIÓN SENO**

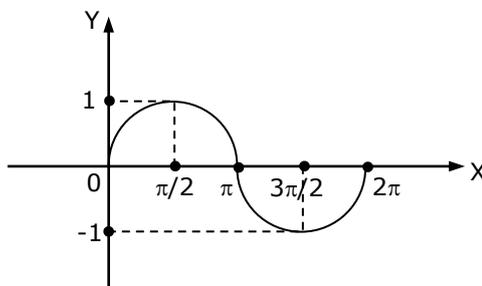
a. **Definición**

$$\text{Sen} = \{(x; y) / y = \text{Sen}x\}$$

DOM (SEN): " x " $\in <-\infty; \infty>$ o IR
RAN (SEN): " y " $\in [-1; 1]$

Gráfico de la Función SENO

- Una parte de la gráfica de la función seno se repite por tramos de longitud 2π . Esto quiere decir que la gráfica de la función seno es periódica de período 2π . Por lo tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico:



X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Y=Senx	0	1	0	-1	0

Nota

El período de una función se representa por la letra "T". Entonces el período de la función seno se denota así:

$$T(\text{Sen}x=2\pi)$$

1. **FUNCIÓN COSENO**

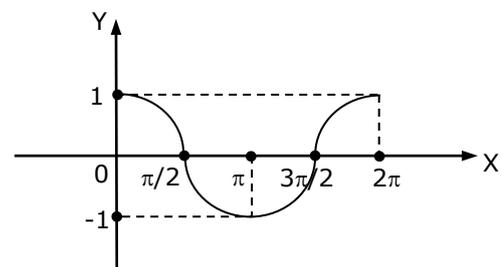
a. **Definición**

$$\text{Cos} = \{(x; y) / y = \text{Cos}x\}$$

DOM (COS): " x " $\in <-\infty; \infty>$ o IR
RAN (COS): " y " $\in [-1; 1]$

Gráfico de la Función COSENO

- Una parte de la gráfica de la función coseno se repite por tramos de longitud 2π . Esto quiere decir que la gráfica de la función coseno es periodo 2π . Por la tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico:



X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Y=Cosx	1	0	-1	0	1

Nota

El período de una función Coseno se denota así:

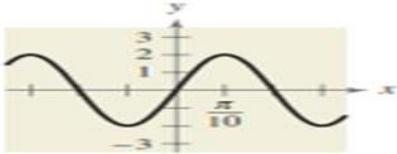
$$T(\text{Cos}x=2\pi)$$



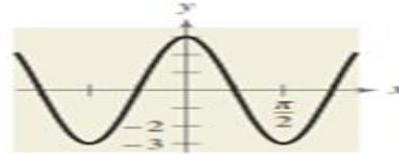
A. BLOQUE I

Encuentre el Periodo y Amplitud

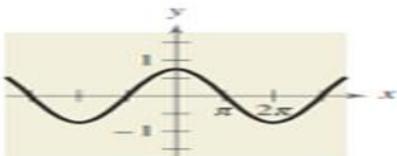
1. $y = 2 \operatorname{sen} 5x$



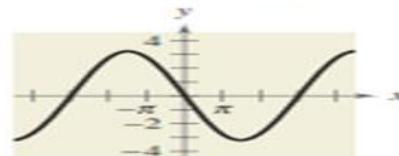
2. $y = 3 \cos 2x$



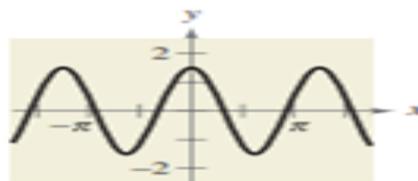
3. $y = \frac{3}{4} \cos \frac{x}{2}$



4. $y = -3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}$



5. $y = \frac{3}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$



6. $y = -4 \operatorname{sen} x$

7. $y = 3 \operatorname{sen} 10x$

8. $y = -\cos \frac{2x}{3}$

9. $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\pi x$

10. $y = \frac{2}{3} \cos \frac{\pi x}{10}$

B. BLOQUE II

Determine la amplitud, periodo, desplazamiento de fase y grafique f y g en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. (Incluya dos periodos).

1. $f(x) = -2 \operatorname{sen} x$

$g(x) = 4 \operatorname{sen} x$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{3}$

3. $f(x) = \cos x$

$g(x) = 2 + \cos x$

4. $f(x) = 2 \cos 2x$

$g(x) = -\cos 4x$



5. $f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

7. $f(x) = 2 \cos x$

$$g(x) = 2 \cos(x + \pi)$$

6. $f(x) = 4 \operatorname{sen} \pi x$

$$g(x) = 4 \operatorname{sen} \pi x - 3$$

8. $f(x) = -\cos x$

$$g(x) = -\cos(x - \pi)$$

C. BLOQUE III

Determine la amplitud, periodo, desplazamiento de fase y trace la gráfica de la función. (Incluya dos periodos).

1. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2. $f(x) = \cos 2\pi x$

3. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

4. $f(x) = 3 \cos(x + \pi)$

5. $y = -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$

6. $y = 2 - \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{3}$

7. $y = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

8. $y = 2 \cos x - 3$

9. $y = -3 + 5 \cos \frac{\pi t}{12}$

10. $y = -3 \cos(6x + \pi)$



SEMANA 14
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

SESIÓN N° 01 y N° 02
Tema 21: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Definición de función seno inversa

La función seno inversa se define por

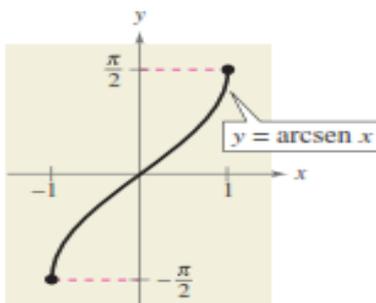
$$y = \arcsen x \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen } y = x$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. El dominio de $y = \arcsen x$ es $[-1, 1]$, en tanto que el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

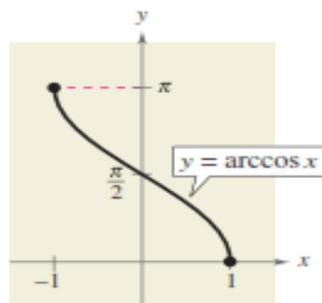
Definiciones de las funciones trigonométricas inversas

Función	Dominio	Rango
$y = \arcsen x$ si y sólo si $\text{sen } y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\text{cos } y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\text{tan } y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

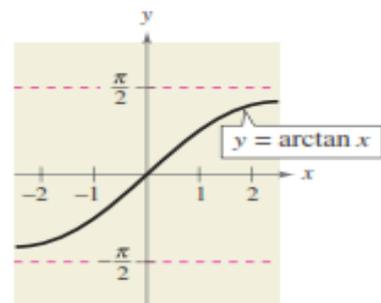
Gráficas de las tres Funciones Trigonómicas Inversas



DOMINIO: $[-1, 1]$
RANGO: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



DOMINIO: $[-1, 1]$
RANGO: $[0, \pi]$



DOMINIO: $(-\infty, \infty)$
RANGO: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Propiedades inversas de funciones trigonométricas

Si $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, entonces

$$\text{sen}(\arcsen x) = x \quad \text{y} \quad \arcsen(\text{sen } y) = y.$$

Si $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$, entonces

$$\text{cos}(\arccos x) = x \quad \text{y} \quad \arccos(\text{cos } y) = y.$$

Si x es un número real y $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$$\text{tan}(\arctan x) = x \quad \text{y} \quad \arctan(\text{tan } y) = y.$$



A. BLOQUE I

Usando una calculadora determina el valor de:

1. $M = \arcsen(0.45)$
2. $P = \text{sen}^{-1}(0.76)$
3. $M = \arccos(0.07)$
4. $P = \tan^{-1}(7)$
5. $A = \text{arccot}(-2,7)$
6. $P = \text{sec}^{-1}(7)$
7. $T = 3 \text{ arccsc}(-5,7)$
8. $R = -4 \text{ csc}^{-1}(12,5)$
9. $P = -3\text{cos}^{-1}(0.22)$
10. $T = -8 \arcsen(0.48)$

Evalúe las siguientes expresiones sin usar la calculadora:

1. $\arcsen \frac{1}{2}$
2. $\arccos \frac{1}{2}$
3. $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
5. $\arctan(-\sqrt{3})$
6. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
7. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
8. $\tan^{-1} 0$
9. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
10. $\arctan \sqrt{3}$

B. BLOQUE II

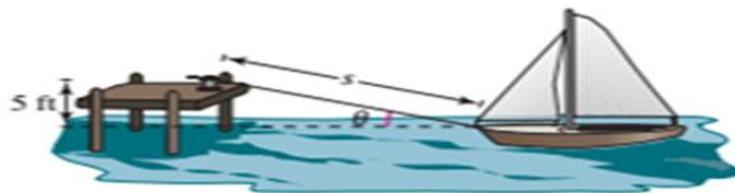
Determine el valor exacto de las siguientes expresiones (Sugerencia: trace un triángulo rectángulo)



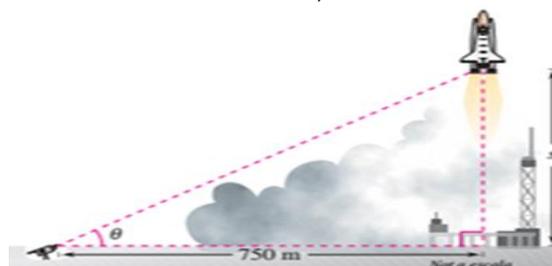
1. $\operatorname{sen}\left(\arctan \frac{3}{4}\right)$
2. $\operatorname{sec}\left(\operatorname{arcsen} \frac{4}{5}\right)$
3. $\cos(\tan^{-1} 2)$
4. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
5. $\cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{5}{13}\right)$
6. $\operatorname{csc}\left[\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)\right]$
7. $\operatorname{sec}\left[\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$
8. $\tan\left[\operatorname{arcsec}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$
9. $\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$
10. $\cot\left(\arctan \frac{5}{8}\right)$

C. BLOQUE III:

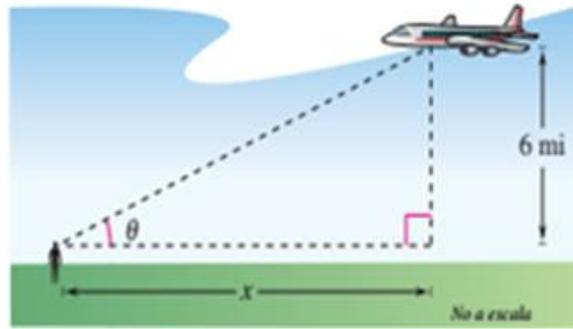
1. **ATRACAR UN BOTE:** Un bote es jalado por medio de un malacate situado en un muelle a 5 pies sobre la cubierta del bote (vea la figura). Sea θ el ángulo de elevación del bote al malacate y sea s la longitud de la cuerda del malacate al bote.



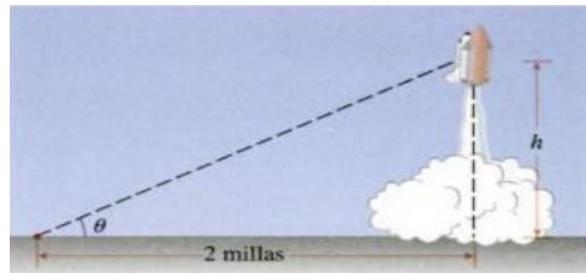
- a) Escriba θ como función de s .
 - b) Determine θ cuando $s=40$ pies y $s=20$ pies.
2. **FOTOGRAFIA:** Una cámara de televisión al nivel del suelo está filmando el despegue de un transbordador espacial en un punto a 750 metros de la plataforma de lanzamiento (vea la figura). Sea θ el ángulo de elevación del transbordador y sea x la altura del transbordador.



- a) Escriba θ como función de x .
 - b) Determine θ cuando $x=300$ metros y $x=1200$ metros
3. **ANGULO DE ELEVACION:** Un avión vuela a una altitud de 6 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considere θ y x como se ve en la figura.

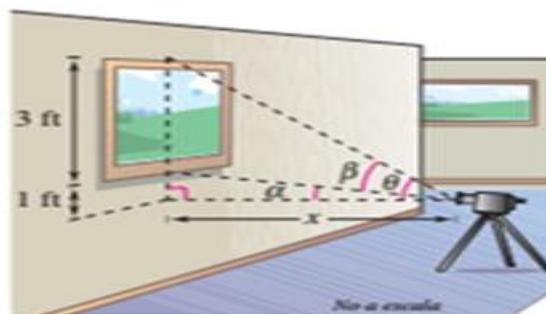


- a) Escriba θ como función de x .
 - b) Determine θ cuando $x=7$ millas y $x=1$ milla
4. **ALTURA DEL TRANSBORDADOR ESPACIAL:** Un observador mira al transbordador a dos millas de la plataforma de lanzamiento.

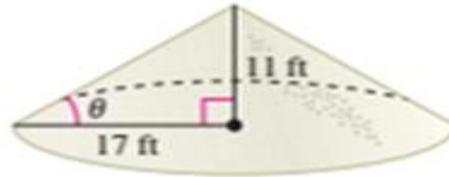


- a) Exprese la altura del transbordador espacial en función del ángulo de elevación θ .
 - b) Exprese el ángulo de elevación θ en función de la altura h del transbordador espacial.
5. **FOTOGRAFIA:** Un fotógrafo está tomando una fotografía de una pintura de tres pies de alto colgada en una galería de arte. El lente de la cámara está a 1 pie debajo del borde inferior de la pintura (vea figura). El ángulo β subtendido por el lente de la cámara a x pies de la pintura es:

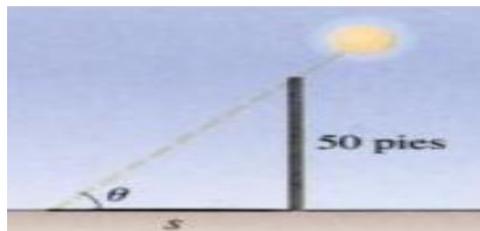
$$\beta = \arctan \frac{3x}{x^2 + 4}; x > 0$$



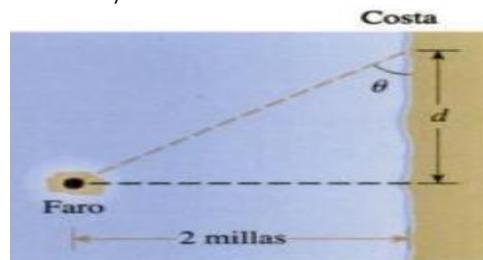
- a) Use una calculadora de gráficas para graficar β como función de x .
 - b) Mueva el cursor a lo largo de la gráfica para aproximar la distancia desde la pintura cuando β sea máximo.
 - c) Identifique la asíntota de la gráfica y discuta su significado en el contexto del problema.
6. **ANGULO DE REPOSO GRANULAR:** Diferentes tipos de sustancias granulares se asientan naturalmente a diferentes ángulos cuando se almacenan en pilas en forma de conos. Este ángulo θ se denomina ángulo de reposo (vea figura). Cuando sal de piedra se almacena en una pila en forma de cono de 11 pies de alto, el diámetro de la base de la pila es de unos 34 pies.



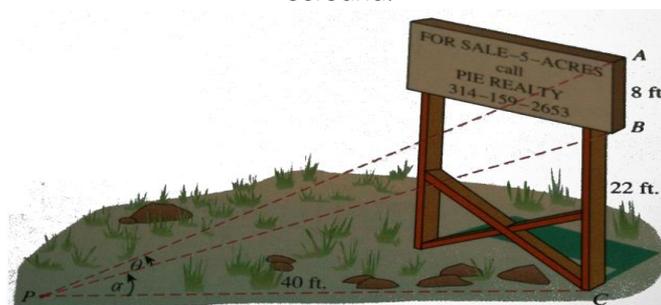
- Determine el ángulo de reposo para sal de piedra.
 - ¿Cuál es la altura de la pila de sal de piedra que tiene un diámetro de 100 pies en la base?
7. **ANGULO DE REPOSO GRANULAR:** Cuando se almacena maíz integral en una pila en forma de cono de 20 pies de alto, el diámetro de la base de la pila es de unos 82 pies.
- Determine el ángulo de reposo del maíz integral.
 - ¿Cuál es la altura de la pila de maíz que tiene un diámetro de 100 pies en la base?
8. **ALTURA DE UN POSTE:** Un poste de 50 pies arroja una sombra como se ilustra en la figura.
- Expresa el ángulo de elevación θ del Sol en función del largo s de la sombra.
 - Determine el ángulo θ de la elevación del Sol cuando la sombra mide 20 pies de largo.



9. Un faro esta situado en una isla que esta a dos millas fuera de la costa (vease la figura). Expresa el ángulo formado por el haz de luz y la costa en terminos de la distancia d en la figura.



10. En el siguiente gráfico, determine el valor de θ , aproximado a la décima más cercana.





SEMANA 14
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

SESIÓN N° 03
Tema 22: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x} \quad \cot x = \frac{1}{\operatorname{tan} x}$$

$$\operatorname{tan} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \quad \cot x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \quad \operatorname{tan}^2 x + 1 = \sec^2 x \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares e impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \operatorname{cos}(-x) = \operatorname{cos} x \quad \operatorname{tan}(-x) = -\operatorname{tan} x$$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{cos} u \quad \operatorname{tan}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \quad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{tan} u \quad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

GUÍA PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- 1. Empezar con un lado.** Escoger un lado de la ecuación y escribirlo. El objetivo es transformarlo en el otro lado. Suele ser más fácil empezar con el lado más complicado.
- 2. Usar identidades conocidas.** Use álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Lleve las expresiones fraccionarias a un denominador común, factorice y use las identidades fundamentales para simplificar expresiones.
- 3. Convertir a senos y cosenos.** Si se ha quedado bloqueado, puede que encuentre útil reescribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.



1. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

1.1 IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$
$1 + \text{Tan}^2\theta = \text{Sec}^2\theta$
$1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta$

1.2 IDENTIDADES POR COCIENTE

$\text{Tan}\theta = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}$
$\text{Cot}\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$

1.3 IDENTIDADES RECÍPROCAS

$\text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1$
$\text{Cos}\theta \cdot \text{Sec}\theta = 1$
$\text{Tan}\theta \cdot \text{Cot}\theta = 1$

Observaciones: Sabiendo que: $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

Despejando: $\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta \Rightarrow \text{Sen}^2\theta = (1 + \text{Cos}\theta)(1 - \text{Cos}\theta)$

Así mismo: $\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta \Rightarrow \text{Cos}^2\theta = (1 + \text{Sen}\theta)(1 - \text{Sen}\theta)$

2. IDENTIDADES AUXILIARES

- A) $\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
- B) $\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
- C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta$
- D) $\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \text{Sec}^2\theta \cdot \text{Csc}^2\theta$
- E) $(1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = 2(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$

PROBLEMAS PARA DEMOSTRAR

Demostrar una identidad consiste en que ambos miembros de la igualdad propuesta son equivalentes, para lograr dicho objetivo se siguen los siguientes pasos:

1. Se escoge el miembro "más complicado"
2. Se lleva a Senos y Cosenos (por lo general)
3. Se utilizan las identidades fundamentales y las diferentes operaciones algebraicas.

Ejemplo:

1) Demostrar: $\text{Sec}x(1 - \text{Sen}^2x)\text{Csc}x = \text{Cot}x$

Se escoge el 1º miembro:

$$\text{Sec}x(1 - \text{Sen}^2x)\text{Csc}x =$$

Se lleva a senos y cosenos:

$$\frac{1}{\text{Cos}x} \cdot (\text{Cos}^2x) \cdot \frac{1}{\text{Sen}x} =$$



Se efectúa:

$$\text{Cos}x \cdot \frac{1}{\text{Sen}x} =$$

$$\boxed{\text{Cot}x = \text{Cot}x}$$

PROBLEMAS PARA REDUCIR Y SIMPLIFICAR

- 1) Reducir: $K = \text{Sen}^4x - \text{Cos}^4x + 2\text{Cos}^2x$
Por diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned} K &= \overbrace{(\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x)}^1 (\text{Sen}^2x - \text{Cos}^2x) + 2\text{Cos}^2x \\ K &= \text{Sen}^2x - \text{Cos}^2x + 2\text{Cos}^2x \\ K &= \text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x \Rightarrow K = 1 \end{aligned}$$

- 2) Simplificar: $E = \frac{1 + \text{Cos}x}{\text{Sen}x} - \frac{\text{Sen}x}{1 - \text{Cos}x}$

$$E = \frac{\overbrace{(1 + \text{Cos}x)(1 - \text{Cos}x)}^{1 - \text{Cos}^2x} - (\text{Sen}x)(\text{Sen}x)}{\text{Sen}x(1 - \text{Cos}x)}$$

$$E = \frac{\text{Sen}^2x - \text{Sen}^2x}{\text{Sen}x(1 - \text{Cos}x)} \rightarrow E = \frac{0}{\text{Sen}x(1 - \text{Cos}x)} \Rightarrow E = 0$$

PROBLEMAS CON CONDICIÓN

Dada una o varias condiciones se pide hallar una relación en términos de dicha o dichas condiciones.

Ejemplo:

Si: $\text{Sen}x + \text{Cos}x = \frac{1}{2}$. Hallar: $\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x$

Resolución

Del dato: $(\text{Sen}x + \text{Cos}x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\underbrace{\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x + 2\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x}_1 = \frac{1}{4}$$

$$2\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = \frac{1}{4} - 1$$

$$2\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = -\frac{3}{8}$$



A. BLOQUE I

Demuestre las siguientes identidades:

1. $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
2. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$
3. $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x$
4. $(\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
5. $\frac{\cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = (\sec x + \tan x)^2$
6. $\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x = \frac{1}{4} \sin 4x$
7. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$
8. $\frac{2 \sec x}{\sec x - 1} = \operatorname{csc}^2\left(\frac{x}{2}\right)$
9. $\frac{\sin 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x \cdot \sin 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \tan 2x$
10. $\tan x + \cot x = 2 \operatorname{cosec} 2x$

B. BLOQUE II

1. Simplificar: $G = \frac{\sin x \sec x}{\tan x}$
2. Simplificar: $R = \frac{1 + \operatorname{Csc} x}{\cos x + \cot x}$
3. Verifique la identidad: $\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} = \frac{-\cos^2 x}{(\sin x + 1)^2}$
4. Verifique la identidad: $\frac{1 + \operatorname{Tg}^2 x}{1 - \operatorname{Tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$
5. Verifique la identidad: $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cdot \cos x} = 2 + \sec x \operatorname{Csc} x$
6. Simplificar: $R = (\sin x + \cos x)(\tan x + \cot x) - \sec x$
7. Reducir: $H = (\sec x - \cos x)(\operatorname{Csc} x - \sin x)(\tan x + \cot x)$
8. Si: $\operatorname{Tg} \theta = 7 - \operatorname{Ctg} \theta$



Calcular: $E = \sqrt{\sec^2 \theta + \operatorname{Ctg}^2 \theta}$

9. Reducir: $E = \frac{\sec^2 x + \operatorname{Csc}^2 x + \sec^2 x \cdot \operatorname{Csc}^2 x}{2 \sec^2 x \cdot \operatorname{Csc}^2 x} + \operatorname{Tg}^2 x$

10. Reducir: $H = \frac{(1 - \operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x)^2 (1 + \operatorname{Sen} x)}{\operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Cos} x (1 + \operatorname{Cos} x)}$

C. BLOQUE III

1. Reducir: $E = \operatorname{Sen}^2 x \cdot \operatorname{Sec} x + \operatorname{Cos} x$

2. Simplificar: $E = \frac{\sec x - \tan x - 1}{\csc x - \cot x - 1}$

3. Reducir:

$$E = \frac{1}{1 - \cos^2 x} + \frac{1}{\csc^2 x - 1} - \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

4. Calcular el valor de "K" si: $\frac{1}{1+K} + \frac{1}{1-K} = 2 \sec^2 x$

5. Reducir: $W = (\operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x + 1)(\operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x - 1)$

6. Reducir: $G = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{Csc} x - \operatorname{Sen} x}{\operatorname{Sec} x - \operatorname{Cos} x}}$

7. Reducir:

$$K = \operatorname{Ctg} x \cdot \operatorname{Cos} x - \operatorname{Csc} x (1 - 2 \operatorname{Sen}^2 x)$$

8. Si: $\csc x - \cot x = \frac{1}{5}$; Calcular: $E = \sec x + \tan x$

9. Reducir: $H = \tan^2 x [\tan^4 x + 3 \tan^2 x + 3] + 1$

10. Reducir: $G = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{cos} x} + \frac{\tan x + \operatorname{cos} x - 1}{\operatorname{sen} x}$



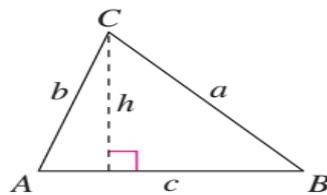
SEMANA 15
LEY DE SENOS Y COSEENOS

SESIÓN N° 02 y 03
Tema 23: LEY DE SENOS Y COSEENOS

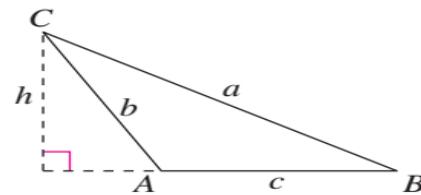
Ley de los senos

Si ABC es un triángulo con lados a , b y c , entonces

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$



A es agudo.



A es obtuso.

Ley de los cosenos

Forma estándar

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Forma alternativa

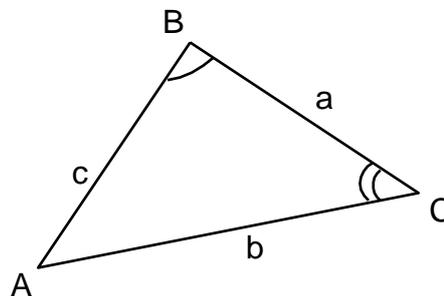
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

1. LEY DE SENOS

En todo triángulo la longitud de cada lado es D.P. al seno del ángulo que se opone al respectivo lado.



$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} = K$$

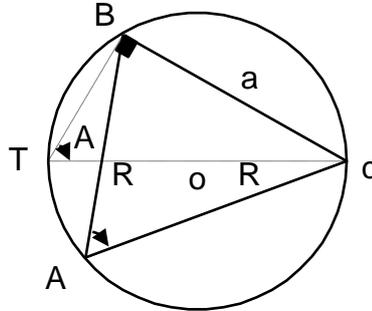
Sea "S" el Área del ΔABC



$$S = \frac{bc}{2} \text{Sen}A \quad ; \quad S = \frac{ac}{2} \text{Sen}B$$

Igualando áreas: $\frac{ac}{2} \text{Sen}B = \frac{bc}{2} \text{Sen}A \quad ; \quad \text{luego: } \frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B}$

COROLARIO DEL TEOREMA DE SENOS



 **TBA : Sen A = $\frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{Sen}A}$**

$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} = 2R$
--

R = Circunradio

*** Observaciones:**

$$a = 2R \text{Sen}A,$$

$$b = 2R \text{Sen}B,$$

$$c = 2R \text{Sen}C$$

2. LEY DE COSENOS

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{Cos}A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{Cos}B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{Cos}C$

Observaciones:

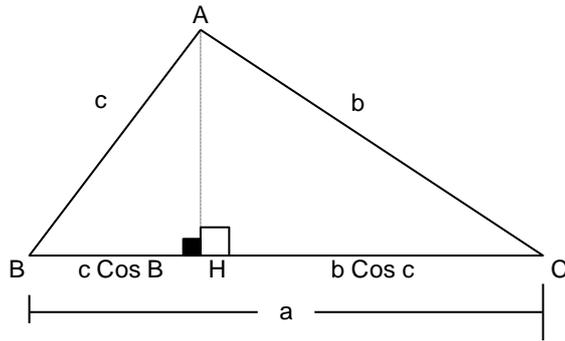
$$\text{Cos}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \text{Cos}B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \text{Cos}C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3. LEY DE TANGENTES

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$	$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\text{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)}$	$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\text{tg}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{A-C}{2}\right)}$
---	---	---



4. LEY DE PROYECCIONES

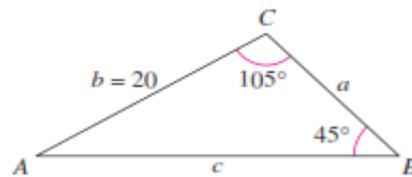


$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}$$

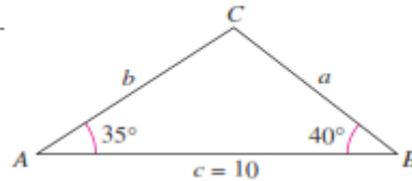
A. BLOQUE I:

Use la ley de los senos para resolver el triángulo. Redondee sus respuestas a dos lugares decimales:

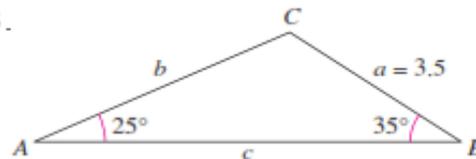
1.



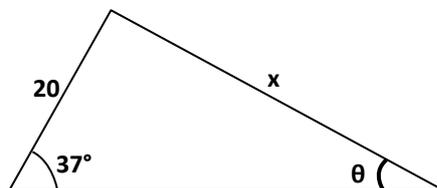
2.



3.



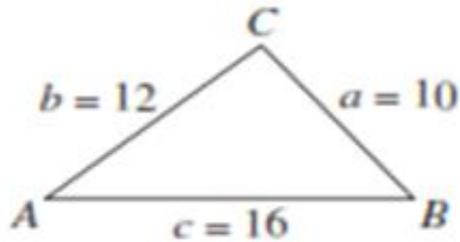
4. Hallar "x" si: $\text{Ctg } \theta = 2\sqrt{2}$



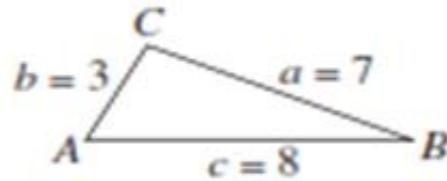
5. El Coseno del mayor ángulo de un triángulo cuyos lados son tres números enteros y consecutivos es iguales a $1/5$. Hallar el perímetro del triángulo. Use la ley de cosenos para resolver el triángulo. Redondee sus respuestas a dos lugares Decimales.



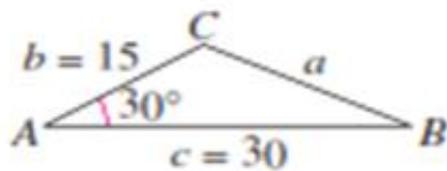
6.



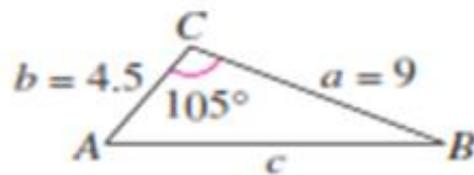
7.



8.



9.

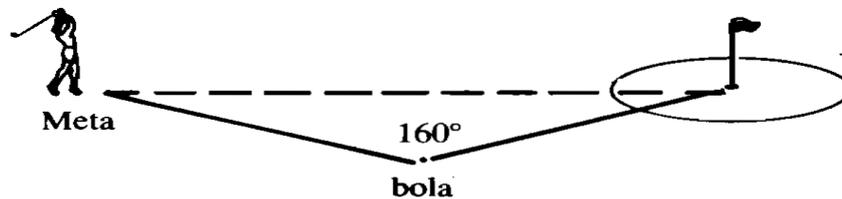


10. $a = 11, b = 15, c = 21$

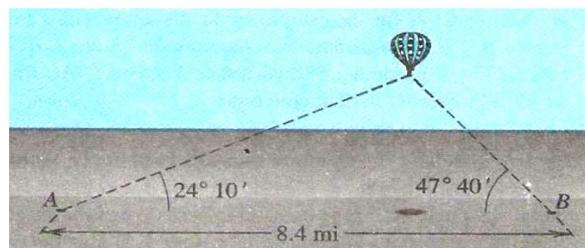
B. BLOQUE II:

Según las leyes y sus características vistas, resuelva cada una de las siguientes situaciones:

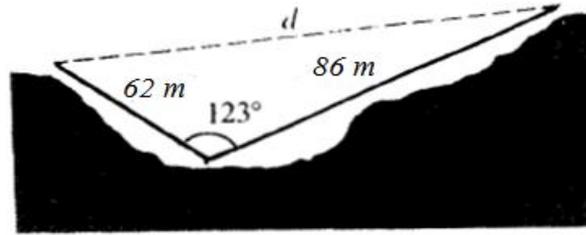
1. La distancia entre la meta y un hoyo particular de golf es de 370 m. Una golfista le pega a la pelota y la coloca a una distancia de 210 m. Desde el punto donde está la pelota, ella mide un ángulo de 160° entre la meta y el hoyo, encuentre el ángulo de su lanzamiento y cuál es la distancia entre la bola y el hoyo (**véase figura**).



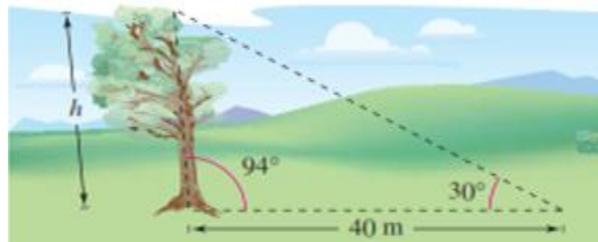
2. Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son de $24^\circ 10'$ y $47^\circ 40'$, respectivamente (como se muestra en la figura). Los puntos A y B están a 8.4 millas uno del otro y el globo de encuentra entre ambos, en el mismo plano vertical. Calcula la altura del globo sobre el suelo.



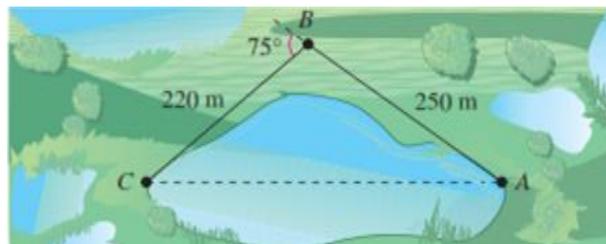
3. Un rombo tiene lados de 10 cm de longitud. Si el ángulo de uno de los vértices es de 50° , encuentre las longitudes de las diagonales.
4. Desde el piso de un cañón se necesitan 62 m de cuerda para alcanzar la cima de la pared del cañón 86 m para alcanzar la cima de la pared opuesta (según la figura). Si ambas cuerdas forman un ángulo de 123° ¿Cuál es la distancia entre la cima de una de las paredes de un cañón y la otra?



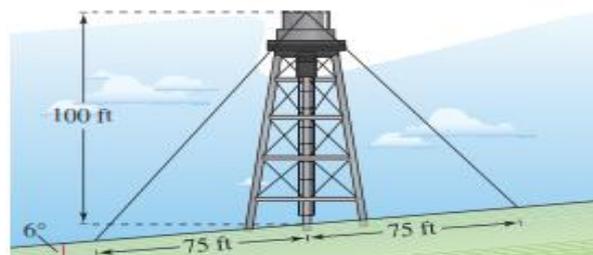
- Una persona se dirige desde un punto A en línea recta hacia un punto C. otra persona hace lo mismo desde un punto B. si la distancia entre A y B es de 8 Km., el ángulo CAB es de 75° y el ángulo CBA es de 45° , ¿Qué distancia tendrá que recorrer cada persona?
- Las boyas A, B y C marcan los vértices de una pista triangular en una laguna. La distancia entre las boyas A y B es de 1.200 m, la distancia entre las boyas A y C es de 900 m y el ángulo CAB es de 110° . Si el bote ganados de la carrera recorrió la pista en 8,2 minutos, ¿Cuál fue su velocidad promedio?
- ALTURA:** Debido a los vientos prevalecientes, un árbol creció de modo que se estaba inclinando 94° respecto a la vertical. En un punto a 40 metros del árbol, el ángulo de elevación a lo alto del árbol es 30° (vea la figura). Determine la altura h del árbol.



- TOPOGRAFIA:** Para aproximar la longitud de un pantano, un topógrafo camina 250 metros del punto A al punto B, luego gira 75° Y camina 220 metros al punto C (vea la figura). Aproxime la longitud AC del pantano.

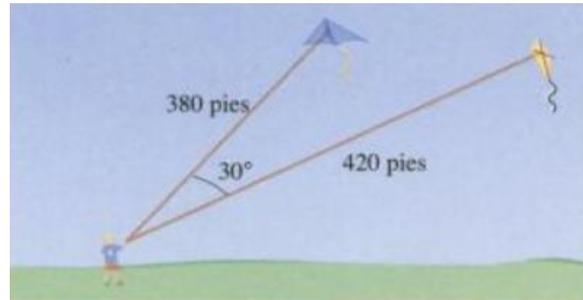


- LONGITUD:** Una torre vertical de 100 pies ha de erigirse en el costado de una colina que forma un ángulo de 6° con la horizontal (vea la figura). Determine la longitud de cada uno de los cables llamados "vientos" que estarán anclados a 75 pies cuesta arriba y cuesta debajo de la base de la torre.





10. **PAPALOTES (Cometas):** Un niño vuela dos cometas al mismo tiempo. Tiene 380 pies de línea hasta una cometa y 420 pies hasta la otra. El niño estima el ángulo entre las dos líneas como 30° . Aproxime la distancia entre las dos cometas.





Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Falvo, D. (2012). *Precálculo* (8ª ed.). México: Editorial Cengage Learning Editores. Código de la biblioteca 515 – L26

Complementaria

- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (6ª ed.). México D.F.: Cengage Learning.
- Zill, D. y Dewar, J. (2008). *Precálculo con avances de cálculo* (4ª ed.). Colombia: Editorial McGraw-Hill.

Enlaces recomendados

- Ditutor. Diccionario de matemática. [Consulta: 5 de febrero 2015]. Recuperado de http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html
- Profesor en línea. Números reales. [Consulta: 6 de febrero 2015]. Recuperado de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros_reales.html
- Curso de álgebra. Números reales. [Consulta: 5 de febrero 2015]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=tMHJbmUGcQk>