



Vive tu propósito

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

GUÍA DE TRABAJO

VISIÓN

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, integras y emprendedoras, con visión internacional, para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradores; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés

PRESENTACIÓN

El material está diseñado para orientar al estudiante en el desarrollo de aplicaciones prácticas relacionadas al avance teórico de la asignatura de Mecánica Vectorial para Ingenieros.

La competencia a desarrollar es: Aplica los principios y leyes de la Estática y la Dinámica en la resolución de problemas en el análisis de partículas y cuerpos rígidos en equilibrio, para la determinación de fuerzas en estructuras, en el análisis de las fuerzas en vigas y cables, y en la comprensión del comportamiento dinámico de partículas y de cuerpos rígidos para la resolución de problemas aplicados a máquinas.

En general, contiene un compendio de contenidos temáticos concisos con sus respectivas guías de práctica para ser desarrolladas en forma secuencial pues está estructurada por unidades y temas de acuerdo al sílabo de la asignatura. Las cuatro unidades que estructuran este material desarrollan plenamente la competencia citada.

La elaboración de la presente guía es fruto de la investigación y reformulación de temas que han sido enriquecidos a partir de la revisión y contrastación de diversas fuentes del conocimiento, entre ellos los textos universitarios de mayor connotación mundial. Así mismo la valiosa experiencia docente ha permitido percibir la importancia del aprendizaje de esta asignatura pues trasciende en el estudiante tanto en su formación académica como en el estudio de diversas asignaturas posteriores en sus planes académicos de las cuales la Mecánica Vectorial representa una base sólida e imprescindible.

Es recomendable que el estudiante inicie el desarrollo de este material conceptualizando los principios y leyes teóricas, esto como consecuencia de un hábito de estudio permanente, para luego aplicar estos fundamentos en la resolución de problemas propuestos en las guías de práctica. La naturaleza de la Mecánica Vectorial y de la Ingeniería implican rigurosidad y precisión en los cálculos numéricos, así como reflexión en la interpretación de resultados, pues estos conocimientos consolidarán a la postre un desempeño laboral eficiente.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

ÍNDICE

PRIMERA UNIDAD

Tema N° 1: INTRODUCCIÓN 06

Guía de práctica N° 1 22

Tema N° 2: EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA 24

Guía de práctica N° 2 27

Tema N° 3: FUERZAS EN EL ESPACIO 31

Guía de práctica N° 3 35

Tema N° 4: CUERPOS RÍGIDOS 38

Guía de práctica N° 4 44

Tema N° 5: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN 2D 46

Guía de práctica N° 5 51

Tema N° 6: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN 3D (1) 53

Guía de práctica N° 6 60

SEGUNDA UNIDAD

Tema N° 7: CENTROIDES Y CENTRO DE GRAVEDAD 62

Guía de práctica N° 7 68

Tema N° 8: FUERZAS DISTRIBUIDAS 70

Guía de práctica N° 8 73

Tema N° 9: ANALISIS ESTRUCTURAL DE ARMADURAS	75
Guía de práctica N° 9	80
Tema N° 10: FRICCIÓN	82
Guía de práctica N° 10	87
Tema N° 11: MOMENTO DE INERCIA	89
Guía de práctica N° 11	95
Tema N° 12: TRABAJO VIRTUAL	97
Guía de práctica N° 12	101
TERCERA UNIDAD	
Tema N° 13: CINEMÁTICA DE PARTICULAS	103
Guía de práctica N° 13	109
Tema N° 14: SEGUNDA LEY DE NEWTON	111
Guía de práctica N° 14	113
Tema N° 15: CINEMÁTICA Y MOVIMIENTO DE CUERPOS RÍGIDOS	115
Guía de práctica N° 15	130
CUARTA UNIDAD	
Tema N° 16: CINÉTICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES	132
Guía de práctica N° 16	138
Tema N° 17: VIBRACIONES MECÁNICAS	140
Guía de práctica N° 17	150
ANEXOS	154
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ENLACES	

PRIMERA UNIDAD

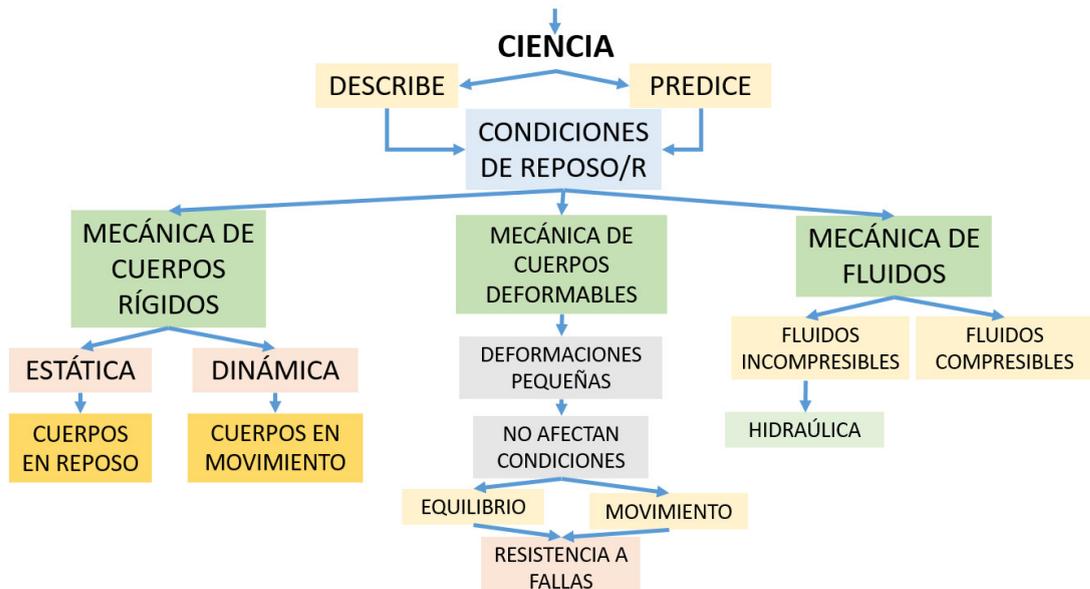
TEMA Nº 1: INTRODUCCIÓN

1.1 CONCEPTOS Y PRINCIPIOS.

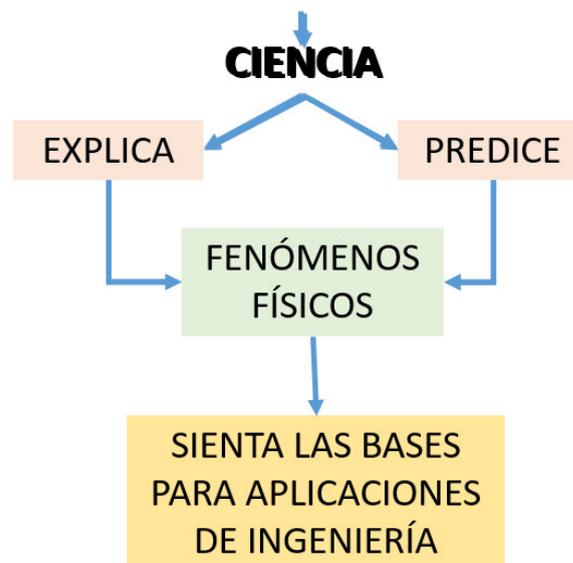
MECÁNICA:

La mecánica se puede definir como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: la mecánica de cuerpos rígidos, la mecánica de cuerpos deformables y la mecánica de fluidos:

¿Qué es la Mecánica?



Mecánica



En este material estudiaremos la mecánica de la cuerpos rígidos, la misma que es un requisito básico para el estudio de las otras ramas de la ingeniería. La mecánica de cuerpos rígidos es esencial para el diseño y el análisis de muchos tipos de elementos

estructurales, componentes mecánicos, mecanismos diversos, o dispositivos electrónicos que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería.

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: Estática y dinámica. **Estática:** Estudia el equilibrio de los cuerpos, cuerpos en reposo o a velocidad constante.

Dinámica: Estudia el movimiento generado por la interacción de cuerpos, denominados fuerzas externas, representadas en las leyes de Newton.

Unidades Mecánicas del Sistema Internacional, cantidades básicas:

Longitud: Usada para describir la posición de un punto en el espacio y describir el tamaño de un sistema físico. Define distancias y propiedades geométricas.

Tiempo: El tiempo se concibe como una secuencia de eventos.

Masa: Es una medición de una cantidad de materia usada para comparar la acción de un cuerpo con la de otro.

Fuerza: Es la acción ejercida de un cuerpo sobre otro. La interacción puede darse por contacto físico o entre cuerpos separados como las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por completo con su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.



Concepciones importantes:

Partícula: Es el modelo matemático de un cuerpo y se representa como un punto, se considera la masa del cuerpo, pero no sus dimensiones.

Cuerpo Rígido: Es una combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí, tal que las propiedades del material no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo.

Fuerza concentrada: Una *fuerza concentrada* representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo sería la fuerza de contacto entre una rueda y el suelo.

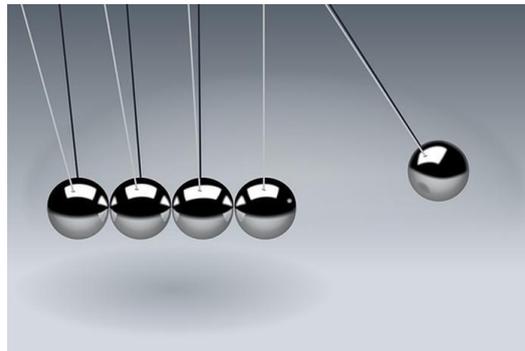
Fuerza neta: La suma vectorial de las fuerzas externas que interactúan sobre un cuerpo se denomina, *fuerza neta*, la cual es importante para la aplicación de principios del álgebra vectorial.

Principios fundamentales:

Basados en la evidencia experimental permiten cimentar el estudio de la mecánica, estos son seis:

Principio de Transmisibilidad: En toda la línea de acción de una fuerza su efecto externo ejercido, sobre un cuerpo rígido, es invariable.

Primera Ley de Newton: Una partícula originalmente en reposo, o que se mueve en línea recta con velocidad constante, tiende a permanecer en este estado siempre que la partícula *no* se someta a una fuerza no balanceada.



Segunda Ley de Newton. Una partícula sobre la que actúa una *fuerza no balanceada* \underline{F} experimenta una aceleración \underline{a} que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud directamente proporcional a la fuerza.

$$\underline{F} = m\underline{a}$$



Tercera Ley de Newton: Si dos cuerpos interactúan entre sí, la fuerza que ejerce el cuerpo A sobre el cuerpo B es igual y opuesta a la fuerza que ejerce el cuerpo B sobre el cuerpo A



Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas: Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una fuerza llamada resultante.

Ley de gravitación de Newton: Propone que dos partículas cualesquiera o cuerpos tienen una fuerza de atracción (gravitacional) que actúa entre ellos. Sin embargo, en el caso de una partícula localizada en la superficie de la Tierra, o cerca de ella, la única fuerza gravitacional que tiene alguna magnitud significativa es la que existe entre la Tierra y la partícula. En consecuencia, esta fuerza, conocida como *peso*, será la única fuerza gravitacional que se considere en nuestro estudio de la mecánica.

1.2 UNIDADES DE MEDICIÓN Conversión de unidades:

En la siguiente tabla se muestran las unidades del SI y del sistema inglés de las cantidades básicas:

Nombre	Longitud	Tiempo	Masa	Fuerza
Sistema Internacional de Unidades SI	metro m	segundo s	kilogramo kg	newton* N $\left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right)$
Uso común en Estados Unidos FPS	pie pie	segundo s	slug* $\left(\frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{pie}}\right)$	libra lb

En la siguiente tabla vemos algunos factores de conversión:

Cantidad	Unidad de medida (FPS)	Es igual a	Unidad de medida (SI)
Fuerza	lb		4.448 N
Masa	slug		14.59 kg
Longitud	pie		0.304 8 m

Sistema Internacional de Unidades

El sistema SI de unidades se usa de manera extensa en mediciones en ingeniería puesto que está destinado a convertirse en el estándar mundial para realizar mediciones. Conocer las reglas del SI así como parte de su terminología resulta relevante para la ingeniería.

Uso de prefijos: Si una cantidad numérica es muy grande o muy pequeña, las unidades usadas para definir su tamaño pueden modificarse mediante el uso de un prefijo, en la tabla siguiente se muestran algunos prefijos:

	Forma exponencial	Prefijo	Símbolo SI
<i>Múltiplo</i>			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
<i>Submúltiplo</i>			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ

Reglas básicas:

Las cantidades definidas por varias unidades que son múltiplos de otras se separan mediante un *punto* para evitar la confusión con la notación de prefijos, como se observa en

$$W = mg = (\text{kg})\left(\frac{m}{s^2}\right) = \text{kg} \cdot \underbrace{\frac{m}{s^2}}_N$$

segundo) en tanto que *ms* representa (mili-segundo).

Con excepción de la unidad base kilogramo, por lo general evite el uso de prefijos en el denominador de las unidades compuestas. Por ejemplo, no escriba *N/mm*, sino *kN/m*; asimismo, *m/mg* debe escribirse como *Mm/kg*.

1.3 CONCEPTOS Y PRINCIPIOS DEL ALGEBRA VECTORIAL

Las cantidades físicas en ingeniería se definen mediante escalares y vectores.

Cantidad escalar:

Un *escalar* es cualquier cantidad física que se puede especificar por completo mediante su *magnitud o módulo*. La longitud, la masa, la energía y el volumen son ejemplos de cantidades escalares.

Cantidad vectorial:

Un *vector* es cualquier cantidad física que requiere tanto de *magnitud* como de *dirección y sentido* para su descripción completa. La fuerza, el desplazamiento, la velocidad y el impulso son ejemplos de cantidades vectoriales.

1.3.1 MAGNITUDES VECTORIALES

Para el estudio de los fenómenos de la naturaleza la Física distingue dos tipos cantidades: escalares y vectoriales. La Física trabaja con ambas.

Una cantidad vectorial es aquella que cumple tres condiciones o propiedades:

- Magnitud
- Dirección y
- Sentido

Por ejemplo, un automóvil puede estar desplazándose a lo largo de la Panamericana Norte, desde Lima a Trujillo, a 90 km/h. En este caso se está haciendo referencia a la Velocidad de dicho automóvil, y por supuesto que se cumplen las tres condiciones antes mencionadas:

- Magnitud : 90 km/h (= 25 m/s)
- dirección : a lo largo de la Panamericana Norte
- Sentido : de Lima a Trujillo (Sur a Norte)

Son ejemplos de cantidades vectoriales:

- La fuerza
- El desplazamiento
- El momento de una fuerza
- La aceleración
- El campo eléctrico

- El campo magnético, entre otros.

Los vectores analíticamente se representan:

Vector A : \vec{A} , \underline{A}

El módulo del vector A : $|\vec{A}|$, A

Gráficamente, un vector se representa mediante un segmento orientado, donde la magnitud del segmento es el módulo del vector, la recta "L" otorga la dirección y se le llama directriz, el sentido del vector lo indicamos mediante la flecha. (Fig 1.1).

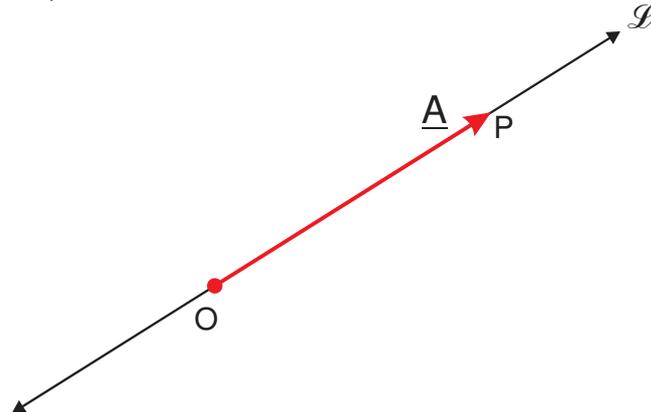


Fig. (1.1).- La "flecha OP" es la representación geométrica de un vector. En la fig.(1.1), el punto "O" es el origen del vector y el punto "P" es su extremo o "cabeza". La orientación lo da el sentido de la flecha y, en cierto modo; su "longitud" es un indicador de su módulo o magnitud.

En cambio, entre, las cantidades que sólo poseen magnitud se pueden citar:

- El calor
- El trabajo
- La densidad de masa, entre otros.

Existen varios tipos de vectores, tales como – por ejemplo - los vectores libres, vectores consecutivos y los vectores concurrentes, por citar algunos.

Vectores libres: son aquellos que tienen libertad en su punto de aplicación, por ejemplo, el momento de un par se aplica a cualquier punto de un cuerpo rígido (fig. 1.2)

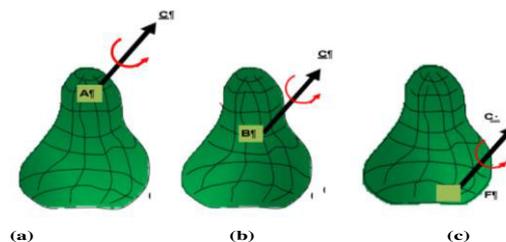


Fig.(1.2).- Un vector libre tal como un momento de par se puede aplicar en cualquier punto de un cuerpo rígido. El momento \underline{C} aplicado en los puntos A, B y F de un cuerpo rígido.

Vectores consecutivos.- son aquellos que están uno a continuación de otro, tal como se ilustra en la fig. (1.3)

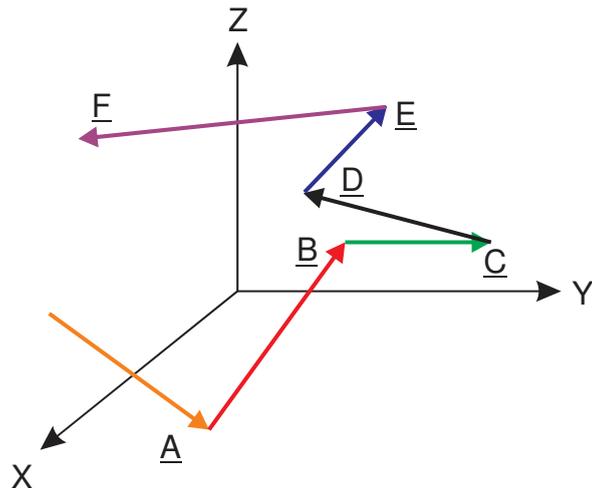


Fig.(1.3).- Los vectores \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D} , \underline{E} y \underline{F} son consecutivos. El extremo de uno es el origen del siguiente.

Vectores concurrentes.- Tienen un punto común de aplicación (fig. 1.4)

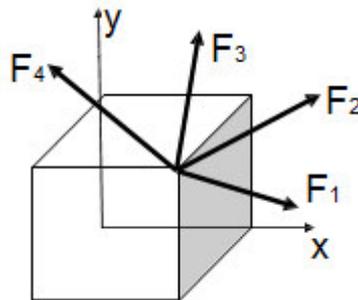


Fig.(1.4).- Conjunto de fuerzas concurrentes en la esquina E de un cuerpo rígido rectangular.

1.3.2 SISTEMA RECTANGULAR DE COORDENADAS Y VECTOR DE POSICION

Todo punto del espacio tiene una coordenada (x,y,z) en un marco de referencia rectangular y su ubicación está definida por su vector de posición \underline{r} , tal como se ilustra en la fig,(1.5).

El módulo de un vector de posición está representado – en coordenadas rectangulares tridimensionales – por la diagonal de una caja rectangular imaginaria.

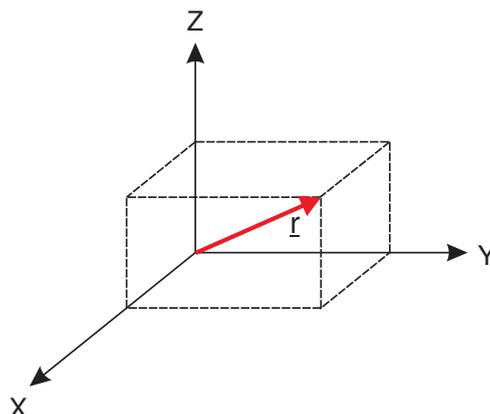


Fig.(1.5).- El vector de posición (\underline{r}) tiene por origen el origen de coordenadas.

1.3.3 VECTORES UNITARIOS

Por definición todo vector unitario es la relación entre un vector y su módulo. Si A representa un vector cualquiera, (fig.1.6) entonces un vector unitario en la dirección y sentido de A está dado por:

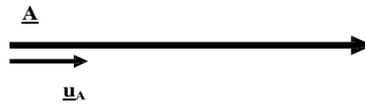


Fig.(1.6).- Vector unitario (\underline{u}_A) del vector \underline{A}

Entonces, el vector \underline{A} de la fig.(1.6) se puede expresar como:

$$\underline{A} = A \cdot \underline{u}_A \quad 1.3.1)$$

Vectores unitarios rectangulares: \underline{i} , \underline{j} , \underline{k}

En el sistema rectangular de coordenadas, los vectores unitarios \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} están en las direcciones de los ejes X, Y y Z, respectivamente (fig. 1.7)

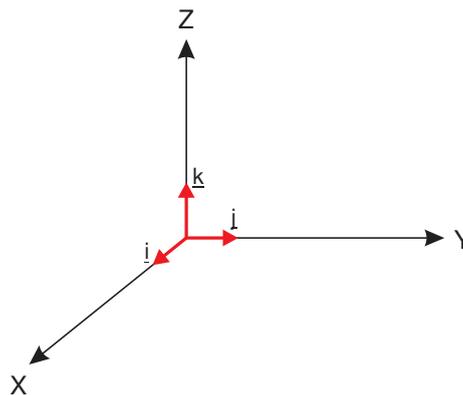


Fig.(1.7).- Vectores unitarios \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} en el sistema de referencia dextrógiro

1.3.4 EXPRESION DE UN VECTOR EN FUNCION DE SUS COMPONENTES RECTANGULARES

Las componentes rectangulares de un vector de posición están dadas tácitamente por las coordenadas de su extremo, tal como se ilustra en la fig.(1.8), para una caja rectangular de dimensiones "a", "L" y "h" para el ancho, largo y altura, respectivamente.

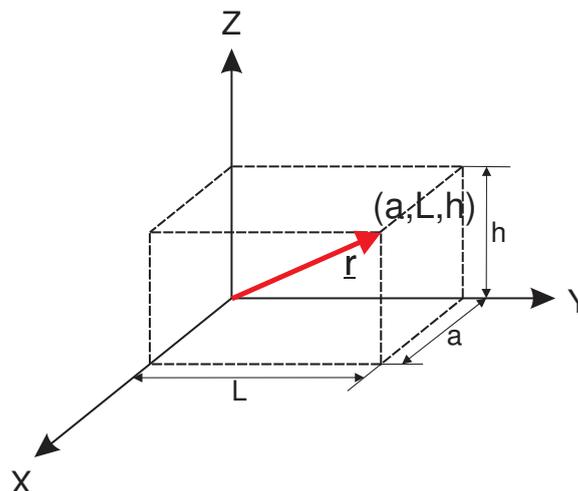


Fig.(1.8).- Vector de posición en función de sus componentes rectangulares

Entonces, se puede expresar el vector de posición como:

$$\underline{r} = a\underline{i} + L\underline{j} + h\underline{k} = (a, L, k) \quad (1.4.1)$$

En general, cualquier vector se puede expresar en términos de sus componentes rectangulares:

$$\underline{A} = A_x\underline{i} + A_y\underline{j} + A_z\underline{k} = (A_x, A_y, A_z) \quad (1.4.2)$$

1.3.5 ÁNGULOS Y COSENOS DIRECTORES

Los ángulos directores son los ángulos que forman la línea de acción de un vector (tal como un vector de posición) con las direcciones positivas de los semi ejes X, Y y Z. (Fig. 1.9).

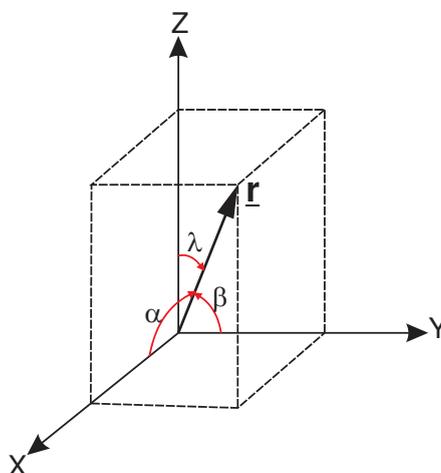


Fig.(1.9).- Ángulos directores de un vector de posición.

Así

α : es el ángulo que forma un vector con el eje X β : es el ángulo que forma un vector con el eje Y λ : es el ángulo que forma un vector con el eje Z

$$\underline{r} = r_x\underline{i} + r_y\underline{j} + r_z\underline{k}$$

$$\cos \alpha = \frac{r_x}{r}$$

$$\cos \beta = \frac{r_y}{r}$$

$$\cos \lambda = \frac{r_z}{r}$$

Propiedad de los cosenos directores:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \lambda = 1 \quad (1.5.1)$$

1.3.6 MODULO DE UN VECTOR

Es la magnitud de la cantidad vectorial al cual el vector representa.

El módulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes rectangulares. Por ejemplo, el módulo del vector de posición de la fig.(1.8) es:

$$\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{L}^2 + \mathbf{h}^2}$$

en este caso, representa la diagonal de la caja rectangular

Y en general, el módulo para un vector cualesquiera, es:

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{A}_x^2 + \mathbf{A}_y^2 + \mathbf{A}_z^2}$$

(1.6.1)

1.3.7 VECTOR DESPLAZAMIENTO ENTRE DOS PUNTOS CONOCIDOS

Sean los puntos conocidos, los puntos; $P_1(a_1, b_1, c_1)$ y $P_2(a_2, b_2, c_2)$ los cuales se ilustran en la fig.(1.10).

El vector desplazamiento viene dado por:

$$\underline{\mathbf{R}} = (a_2 - a_1) \cdot \underline{\mathbf{i}} + (b_2 - b_1) \cdot \underline{\mathbf{j}} + (c_2 - c_1) \cdot \underline{\mathbf{k}} = \Delta a \cdot \underline{\mathbf{i}} + \Delta b \cdot \underline{\mathbf{j}} + \Delta c \cdot \underline{\mathbf{k}}$$

1.7.1)

Y su módulo, de acuerdo a (1.6.1):

$$\mathbf{R} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

(1.7.2)

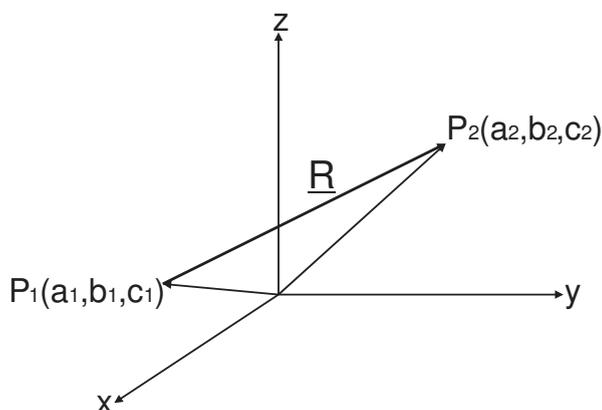


Fig.(1.10).- Vector desplazamiento entre los puntos P_1 y P_2

1.3.8 SUMA Y RESTA DE VECTORES

Los vectores se pueden sumar gráficamente o analíticamente. Gráficamente, aplicando la conocida ley del paralelogramo o el método del triángulo. Reviste mayor interés e importancia la forma analítica porque permite cuantificar el valor de una suma o una resta.

Sean los vectores:

$$\underline{\mathbf{A}} = A_x \cdot \underline{\mathbf{i}} + A_y \cdot \underline{\mathbf{j}} + A_z \cdot \underline{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = B_x \cdot \underline{\mathbf{i}} + B_y \cdot \underline{\mathbf{j}} + B_z \cdot \underline{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\mathbf{C}} = C_x \cdot \underline{\mathbf{i}} + C_y \cdot \underline{\mathbf{j}} + C_z \cdot \underline{\mathbf{k}}$$

Entonces, la suma de estos tres vectores es la llamada resultante, la cual viene a ser igual a:

$$\underline{R} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = (A_x + B_x + C_x) \cdot \underline{i} + (A_y + B_y + C_y) \cdot \underline{j} + (A_z + B_z + C_z) \cdot \underline{k}$$

OPUESTO (o NEGATIVO) DE UN VECTOR

Como su nombre lo indica es el mismo vector, con su mismo módulo y dirección, pero sentido contrario al vector dado. Por ejemplo, sea un vector \underline{A} arbitrario dado por (1.3), donde:

$$\underline{A} = A_x \cdot \underline{i} + A_y \cdot \underline{j} + A_z \cdot \underline{k} = [A_x, A_y, A_z]$$

entonces, el negativo (u opuesto) de \underline{A} será

$$-\underline{A} = -A_x \cdot \underline{i} - A_y \cdot \underline{j} - A_z \cdot \underline{k} = -[A_x, A_y, A_z]$$

RESTA DE DOS VECTORES

La resta de dos vectores se puede considerar como la suma del primero más el negativo del segundo, es decir:

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-\underline{B})$$

1.3.9 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Dados dos vectores \underline{A} y \underline{B} , tal como se muestra en la fig.(1.11), cuyos módulos son A y B, respectivamente, y forman un ángulo "θ" entre ellos.

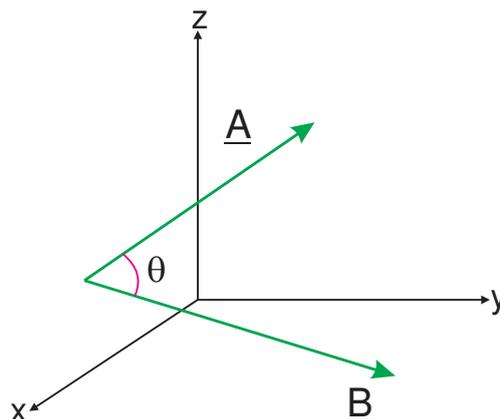


Fig.(1.11).- Dos vectores concurrentes \underline{A} y \underline{B} , que forman un ángulo "θ"

Se define el producto escalar de \underline{A} y \underline{B} como:

$$\underline{A} \bullet \underline{B} = A \cdot B \cos \theta$$

(1.9.1)

El resultado del producto escalar es un escalar.

DESARROLLO DEL PRODUCTO ESCALAR

Dados dos vectores \underline{A} y \underline{B} rectangularmente:

$$\underline{A} = A_x \cdot \underline{i} + A_y \cdot \underline{j} + A_z \cdot \underline{k}$$

$$\underline{B} = B_x \cdot \underline{i} + B_y \cdot \underline{j} + B_z \cdot \underline{k}$$

El desarrollo del primer miembro de (1.8) es igual a:

$$\underline{A} \bullet \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.9.2)$$

Para esto se ha tomado en cuenta que:

$$\underline{i} \bullet \underline{i} = \underline{j} \bullet \underline{j} = \underline{k} \bullet \underline{k} = 1 \quad y$$

$$\underline{i} \bullet \underline{j} = \underline{i} \bullet \underline{k} = \underline{j} \bullet \underline{i} = \underline{j} \bullet \underline{k} = \underline{k} \bullet \underline{i} = \underline{k} \bullet \underline{j} = 0$$

1.3.10 PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Dados dos vectores concurrentes A y B , que forman un ángulo θ , contenidos en un plano Ω , tal como se ilustra en la fig.(1.12), el producto vectorial de estos dos vectores es un tercer vector C el cual es perpendicular al plano Ω y por ende perpendicular a los vectores A y B .

Entonces

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} \quad (1.10.1)$$

Para determinar el sentido del producto vectorial se puede aplicar la regla del tornillo de rosca derecha o la regla de "la mano derecha". El módulo del producto vectorial se define como:

$$|\underline{A} \times \underline{B}| = A \cdot B \cdot \text{sen} \theta \quad (1.10.2)$$

y representa el "área" de la región formado por el paralelogramo, formado por los vectores A y B , según se ilustra en la fig.(1.13).

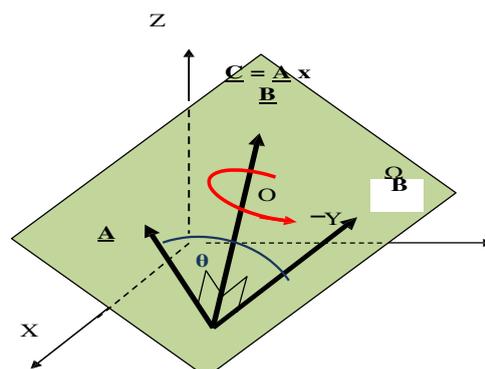


Fig.(1.12).- El vector \underline{C} es el producto vectorial de los vectores \underline{A} y \underline{B} y es

perpendicular (normal) a estos.

$|\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}| =$ Area de la región del paralelogramo

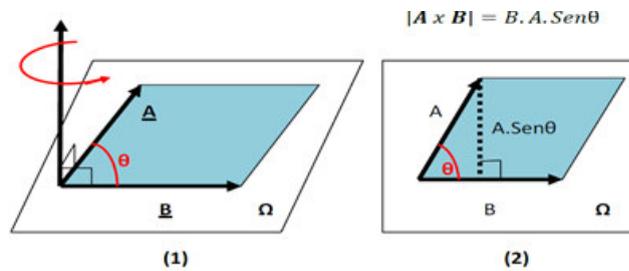


Fig.(1.13).- (1) El módulo de "C" representa el "área" de la región del paralelogramo; (2) la "altura" del paralelogramo es A.senθ y su base es el módulo de B

Propiedad: El producto vectorial no es permutable, es decir:

$$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} \neq \underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{A}} \rightarrow \underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} = -(\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{A}})$$

(1.10.3)

DESARROLLO DEL PRODUCTO VECTORIAL

Dados dos vectores, $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{B}}$ rectangularmente:

$$\underline{\mathbf{A}} = A_x \underline{\mathbf{i}} + A_y \underline{\mathbf{j}} + A_z \underline{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = B_x \underline{\mathbf{i}} + B_y \underline{\mathbf{j}} + B_z \underline{\mathbf{k}}$$

El desarrollo del producto vectorial de (1.12) es:

$$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} = (A_y B_z - A_z B_y) \underline{\mathbf{i}} - (A_x B_z - A_z B_x) \underline{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x) \underline{\mathbf{k}}$$

(1.10.4)

Para esto se ha tomado en cuenta (1.13) y considerando que:

$$\underline{\mathbf{i}} \times \underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{j}} \times \underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{k}} \times \underline{\mathbf{k}} = 0$$

y para el producto de vectores unitarios perpendiculares, se debe tomar la regla de la mano derecha (fig.1.14). Por ejemplo: $\underline{\mathbf{i}} \times \underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{k}}$

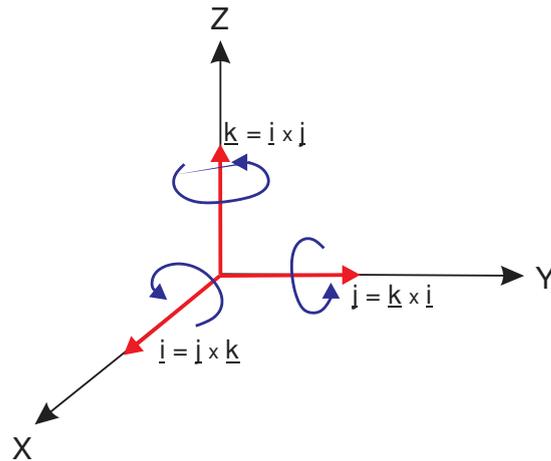


Fig.(1.14).- Producto vectorial de los vectores unitarios por medio de la regla de la “mano derecha”

1.3.11 COMPONENTES Y PROYECCIONES ORTOGONALES DE VECTORES COMPONENTE DE UN VECTOR EN LA DIRECCION DE OTRO VECTOR

La componente de un vector es la proyección escalar de su módulo, en la dirección de otro vector, tal como se ilustra en la fig.1.15

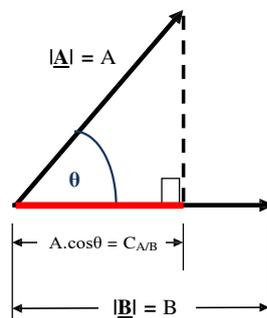


Fig.(1.15).- Componente de un vector **A** en la dirección de otro vector **B**.

La componente de **A** sobre **B**, es un escalar, y se expresa como:

$$C_{A/B} = A \cdot \cos\theta \quad (1.11.1)$$

Pero, esta expresión (1.16a) se encuentra dentro de la definición del producto escalar dada por (1.8), de donde otra forma de definir la componente de **A** sobre **B** es afirmando que es igual al producto escalar entre A y B dividido entre el módulo del vector sobre el cual se proyecta.

$$C_{A/B} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} \quad (1.11.2)$$

PROYECCION DE UN VECTOR EN LA DIRECCION DE OTRO VECTOR

En cambio, la proyección de un vector \underline{A} en la dirección de otro vector \underline{B} es vector cuyo módulo es la componente de \underline{A} sobre \underline{B} . En otras palabras, es la proyección ortogonal de \underline{A} sobre \underline{B} , tal como se ilustra en la fig.1.16

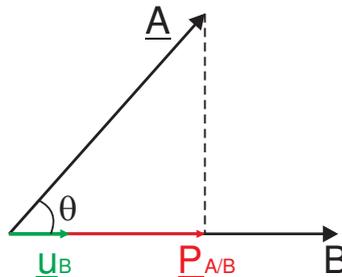


Fig.(1.16).- Proyección de un vector \underline{A} en la dirección de \underline{B}

Como todo vector es igual a su módulo multiplicado por un vector unitario en la dirección y sentido de dicho vector, y como el módulo de la proyección es la componente dada por (1.16.b), entonces se tiene:

$$\underline{P}_{A/B} = C_{A/B} \cdot \underline{u}_B$$

Pero $\underline{u}_B = \underline{B}/B$

de donde, la proyección (vectorial) de un vector \underline{A} en la dirección de \underline{B} es igual al cociente entre el producto escalar de estos vectores y el cuadrado del módulo de \underline{B} , todo esto, multiplicado por el vector sobre el cual se proyecta (\underline{B}):

$$\underline{P}_{A/B} = \left(\frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{B^2} \right) \cdot \underline{B} \quad (1.11.3)$$

1.3.12 CONDICIONES DE NORMALIDAD Y PARALELISMO ENTRE VECTORES

CONDICION DE NORMALIDAD (PERPENDICULARIDAD)

De la definición del producto escalar (1.9.1), dos vectores \underline{A} y \underline{B} son perpendiculares si el ángulo que forman entre sí es igual a 90° y por ende el coseno es cero. Por lo tanto:

$$\text{Si: } \underline{A} \perp \underline{B} \rightarrow \underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \quad (1.12.1)$$

CONDICION DE PARALELISMO

Dos vectores son paralelos si ambos tienen la misma dirección y sentido, aunque no necesariamente sus módulos.

$$\underline{A} \parallel \underline{B} \rightarrow \underline{A} = \lambda \underline{B} \quad (1.12.2)$$

Donde el factor λ es un parámetro constante cuyas unidades depende de la naturaleza de los vectores \underline{A} y \underline{B} .

1.3.13 EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Dada la figura 3D (paralelepípedo) cuyas aristas son los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , se demuestra que el volumen de ese cuerpo es:

$$\text{Volumen} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

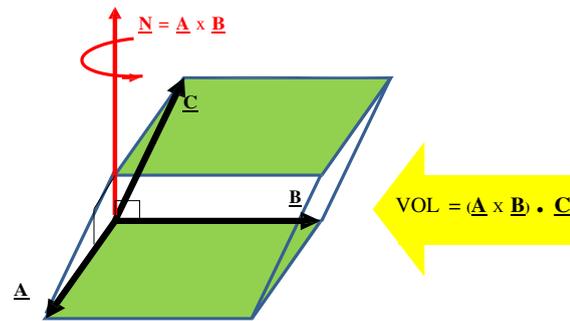


Fig.(1.19).- El volumen de un paralelepípedo se puede determinar si se dan vectorialmente sus aristas. Los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} son aristas de su base (de acuerdo a la posición mostrada) y el vector \mathbf{C} es la tercera arista oblicua.

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 1

TEMA N° 1: Álgebra Vectorial

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

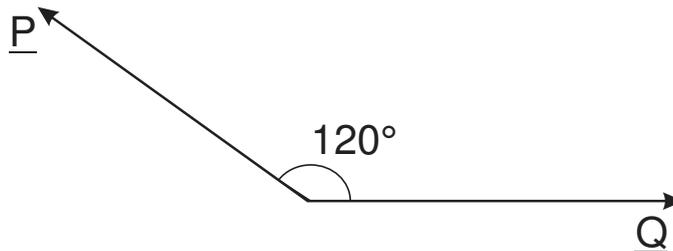
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada y con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

- 1) Le dan los vectores $\underline{A} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$ y $\underline{B} = -3\underline{i} + 3\underline{j}$. Un tercer vector \underline{C} está en el plano XY y es perpendicular a \underline{A} ; el producto escalar con \underline{C} con \underline{B} es 18. Con esta información obtenga las componentes del vector \underline{C} .

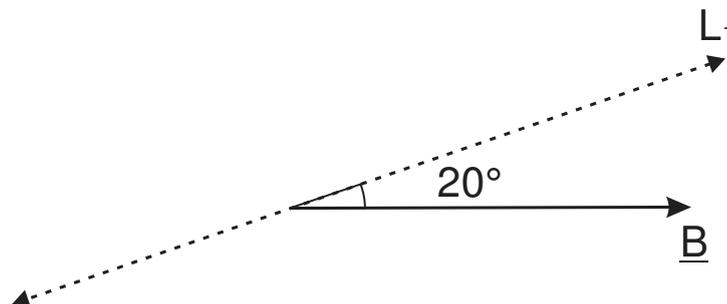
Respuesta: $\underline{C} = -18\underline{i} - 12\underline{j}$

- 2) Determinar el módulo del vector \underline{P} más pequeño, de modo que la resultante de $\underline{P} + \underline{Q}$, sea lo menor posible. Se conoce que: $Q = 800$



Respuesta: $P = 400$

- 3) Hallar el ángulo que forman el vector \underline{A} (más pequeño posible), con \underline{B} , tal que: $\underline{M} = \underline{A} + \underline{B}$, se sitúe sobre la recta L_1 .

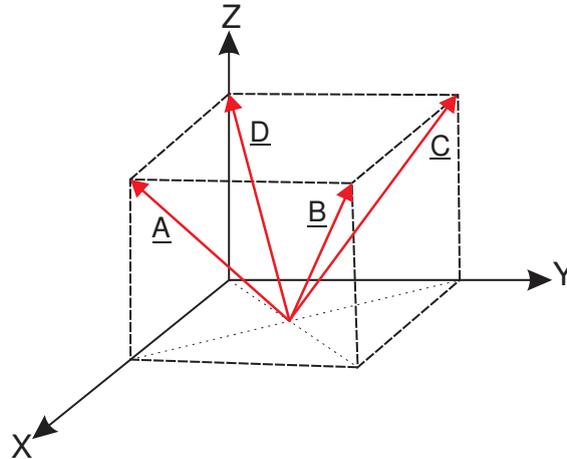


Respuesta: 110°

- 4) Se ha girado los ejes de coordenadas cartesianas, formando un nuevo eje tri-rectangular, representado por los vectores: $\underline{x}' = 2\underline{i} + \underline{y}\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{y}' = \underline{x}\underline{i} - 5\underline{j} + 2\underline{k}$, $\underline{z}' = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{z}\underline{k}$, halle x, y, z para se cumpla la condición.

Respuesta: $x = \frac{68}{3}$, $y = \frac{130}{15}$, $z = -\frac{49}{3}$

- 5) Determine el vector resultante y su respectivo módulo, dado el cubo de lado 9.



Respuesta: $\underline{R} = 24\underline{k}$

- 6) Determine el menor ángulo que forman entre sí los vectores: $\underline{A} = 4\underline{i} + 5\underline{j} - 20\underline{k}$ y $\underline{B} = 3\underline{i} - 2\underline{j} - 6\underline{k}$

Respuesta: $\theta = \arccos\left(\frac{122}{147}\right)$

- 7) Calcula el trabajo realizado por la fuerza: $\underline{F} = 2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$, al desplazar un sólido a lo largo del vector: $\underline{r} = 5\underline{i} + 3\underline{j} + 4\underline{k}$.

Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Estática. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA Nº 2: EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA



2.1 Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue: "Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento)".



2.2 Condición para el equilibrio de una partícula en el plano

Una partícula está en *equilibrio* si permanece en reposo y en un principio estaba en reposo, o si tiene una velocidad constante y originalmente estaba en movimiento. No obstante, más a menudo, el término "equilibrio" o, de manera más específica, "equilibrio estático" se usa para describir un objeto en reposo.

Para mantener el equilibrio, es *necesario* satisfacer la primera ley del movimiento de Newton, la cual requiere que la *fuerza resultante* que actúa sobre una partícula sea igual a *cero*. Esta condición puede ser establecida matemáticamente como:

$$\sum F = 0$$

Para un cuerpo en equilibrio en dos dimensiones:

$$\sum F = (\sum F_x)\underline{i} + (\sum F_y)\underline{j} + (\sum F_z)\underline{k}$$

Ecuación que se cumple si se verifica que:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

2.3 Diagrama de cuerpo libre

Para aplicar la ecuación de equilibrio debemos tomar en cuenta *todas* las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan *sobre* la partícula. La mejor manera de hacer esto es pensar en la partícula como aislada y "libre" de su entorno. Un dibujo que muestra la partícula junto con *todas* las fuerzas que actúan sobre ella se denomina *diagrama de cuerpo libre (DCL)*.

Entre las fuerzas más comunes para analizar el equilibrio de partículas tenemos:

- a) Fuerza gravitacional:** Debida a la interacción con el planeta, se representa por un vector dirigido hacia abajo. A su magnitud se le denomina comúnmente peso (W). La magnitud del peso de un cuerpo se relaciona con su masa así:

$$W = mg$$

Unidades en el SI:

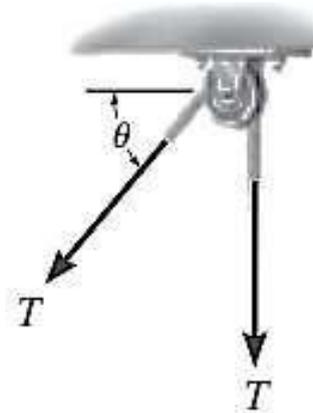
W = Peso (en newton)

m = Masa (en kilogramos)

g = Aceleración de la gravedad = 9.81 m/s^2

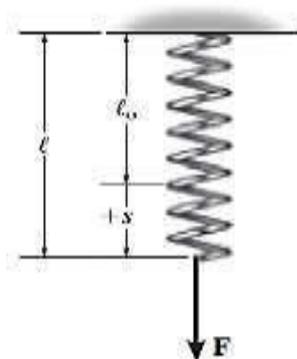


- b) Fuerzas en cables y poleas:** Para partículas supondremos que todos los cables (o cuerdas) tienen un peso insignificante y que no se pueden deformar. Además, un cable puede soportar *sólo* una tensión o fuerza de "jalón" que actúa en la dirección del cable. La fuerza de tensión desarrollada en un *cable continuo* que pasa sobre una polea sin fricción, debe tener una magnitud *constante* para mantener al cable en equilibrio. En la figura el cable se somete a una tensión T en toda su longitud.



- c) Fuerzas en resortes:** Si un *resorte elástico lineal* (o cuerda) de longitud no deformada l_0 se usa como soporte de una partícula, su longitud cambiará en proporción directa a la fuerza F que actúe sobre él, figura adjunta. Una característica que define la "elasticidad" de un resorte es la **constante de resorte o rigidez, k** . La magnitud de la fuerza ejercida en un resorte elástico lineal que tiene una rigidez k y está deformado (alargado o acortado) una distancia igual a $s = l - l_0$, medida desde su posición *sin carga*, es:

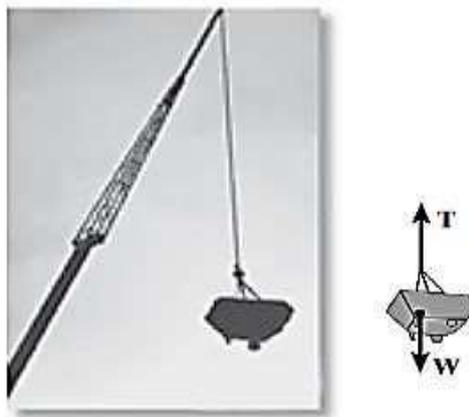
$$F = ks$$



Procedimiento para trazar el DCL de una partícula:

- 1º *Trace un perfil delineado.* Imagine que la partícula está *aislada* o "liberada" de su entorno al trazar su perfil delineado.
- 2º *Muestre todas las fuerzas.* Indique sobre este bosquejo *todas* las fuerzas que *actúan sobre la partícula*. Éstas pueden ser *fuerzas activas*, que tienden a poner la partícula en movimiento, o *fuerzas reactivas*, que son el resultado de las restricciones o soportes que tienden a evitar el movimiento.
- 3º *Identifique cada una de las fuerzas.* Las fuerzas que son *conocidas* deben ser marcadas con sus propias magnitudes y direcciones. Para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas desconocidas se usan letras.

Ejemplo de DCL: La cubeta se mantiene en equilibrio mediante el cable, e instintivamente sabemos que la fuerza en el cable debe ser igual al peso de la cubeta. Al trazar un diagrama de cuerpo libre de la cubeta podemos entender por qué esto es así. Este diagrama muestra que sólo hay dos fuerzas que *actúan sobre la cubeta*, a saber, su peso **W** y la fuerza **T** del cable.


2.4 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el plano

- 1º *Diagrama de cuerpo libre.*
 - ✓ Establezca los ejes x , y en cualquier orientación adecuada.
 - ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas.
 - ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.
- 2º *Aplique las ecuaciones de equilibrio:*

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo.
- ✓ Como la magnitud de una fuerza siempre es una cantidad positiva, si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 2

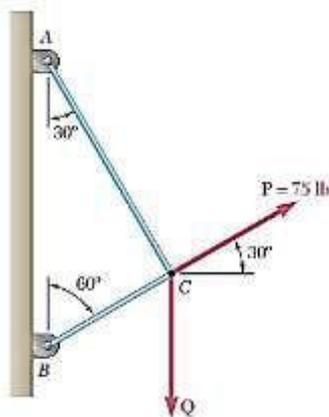
Tema: Equilibrio de una partícula en el plano

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

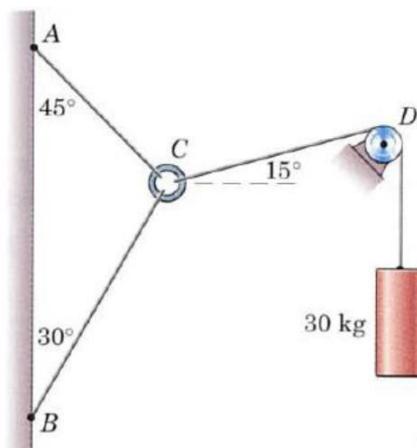
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

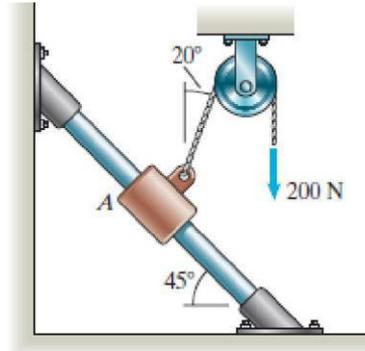
- En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de Q para los cuales la tensión no será mayor que 60 lb en cualquiera de los cables.



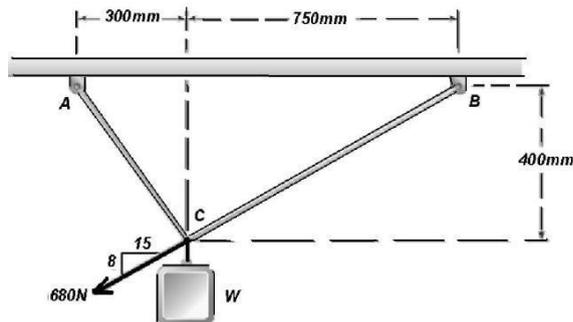
- Tres cables se unen en el cruce del anillo C. Determinar las tensiones en los cables de AC y BC causada por el peso del cilindro de 30 kg



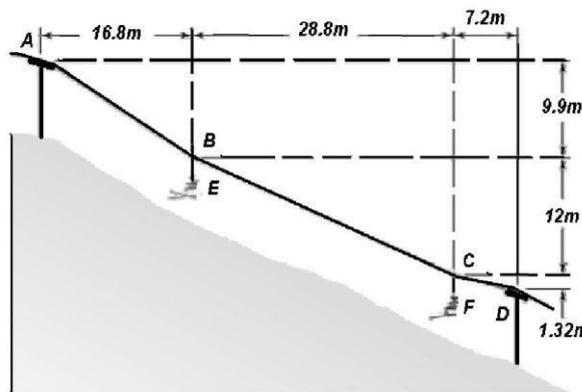
- El collarín deslizante esta en equilibrio en A y en la barra no hay rozamiento. Determina la masa de la barra



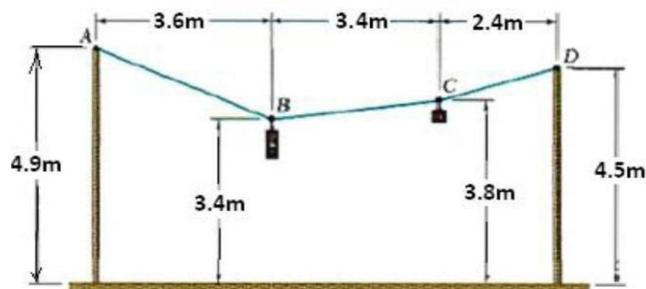
4. Dos cables se amarran juntos en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de W para los cuales la tensión no será mayor a 1250N en cualquiera de los cables.



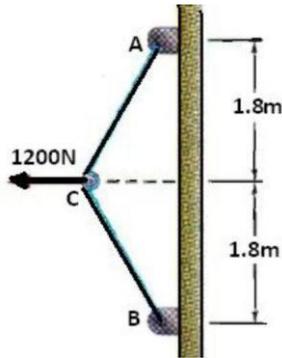
5. Un sistemas de sillas para transportar esquiadores se detiene en la posición mostrada, si cada silla pesa 300N y el esquiador en la silla F pesa 800N, calcule el peso del esquiador en la silla E.



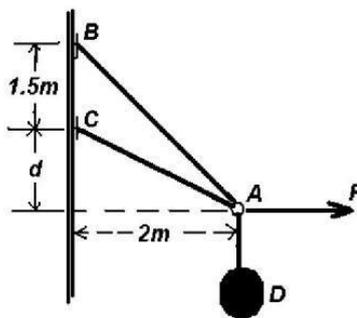
6. Dos semáforos se cuelgan temporalmente de un cable como se muestra en la figura. Si el semáforo colocado en B pesa 200N, determine el peso del semáforo en C.



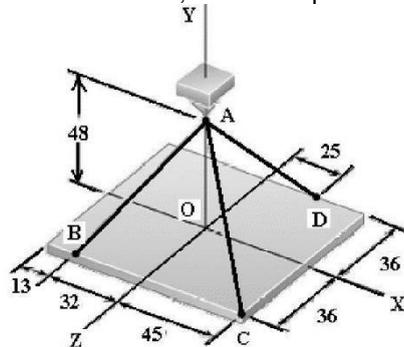
7. Si las porciones AC y BC del cable ABC deben ser iguales, determine la longitud mínima que debe tener el cable para soportar la carga mostrada, si la tensión en este no debe ser mayor a 870N



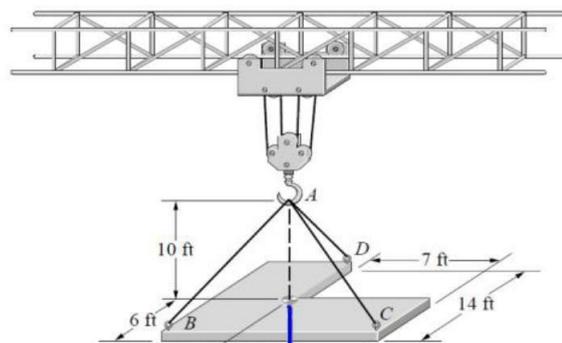
8. La bola D tiene una masa de 20kg. Si una fuerza $F = 100\text{N}$ se aplica horizontalmente al anillo localizado en A, determine la dimensión de "d" mas grande necesaria para que la fuerza en el cable AC sea igual a cero.



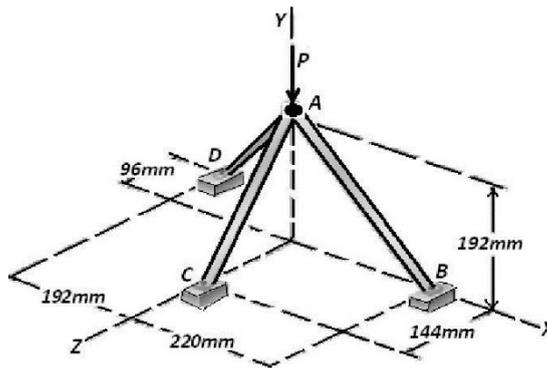
9. Una placa rectangular esta sostenida por tres cables, como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable AC es de 40 lb, calcule el peso de la placa.



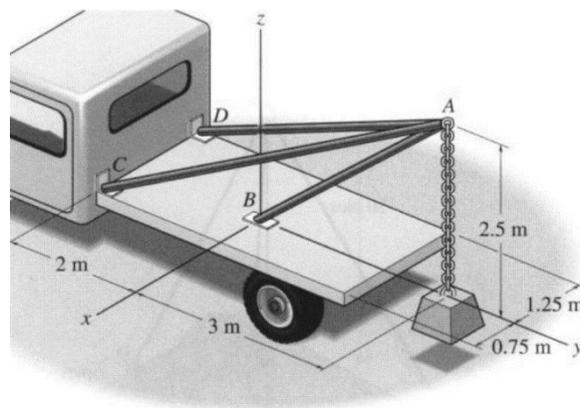
10. El peso de la sección de pared horizontal es $W = 20\,000\text{ lb}$ Determinar las tensiones en los cables AB, AC y AD.



11. El ensamblaje de apoyo esta fijo con pernos a los puntos A, B, C y D y soporta una fuerza $F = 200\text{ N}$. Determina las fuerzas en los elementos AB, AC y AD.



12. Determinar la fuerza que actúa a lo largo del eje de cada uno de los tres puntales necesarios para dar soporte al bloque de 500kg.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA Nº 3: FUERZAS EN EL ESPACIO

3.1 Vectores cartesianos en el espacio:

Las operaciones del álgebra vectorial, cuando se aplican a la resolución de problemas en *tres dimensiones*, se simplifican considerablemente si primero se representan los vectores en forma vectorial cartesiana, lo cual servirá para encontrar la fuerza resultante de un sistema de fuerzas concurrentes.

Vector unitario: Vector de magnitud unitaria que indica la dirección y sentido de algún vector dado, luego para \vec{A} :

$$\underline{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

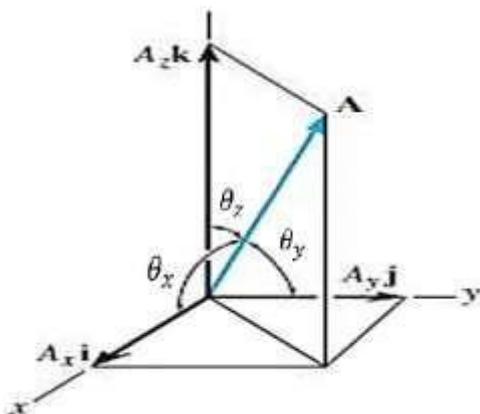
Vectores unitarios cartesianos.

En tres dimensiones, el conjunto de vectores unitarios cartesianos \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , se usa para designar las direcciones de los ejes x , y , z , respectivamente.

3.2 Representación de un vector cartesiano en tres dimensiones:

Representación gráfica de un vector cartesiano en el espacio

Forma cartesiana de un vector



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Magnitud de un vector cartesiano

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Dirección de un vector cartesiano

Dada por los cosenos directores:

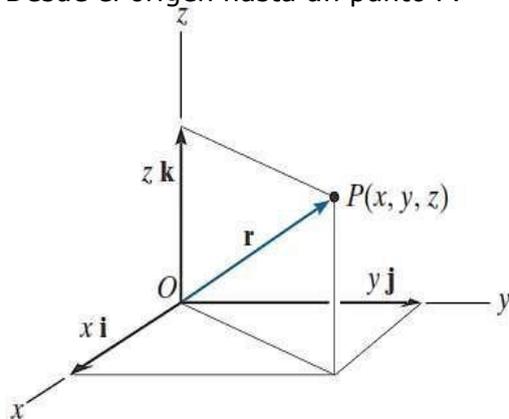
$$\cos \theta_x = \frac{A_x}{A} \quad \cos \theta_y = \frac{A_y}{A} \quad \cos \theta_z = \frac{A_z}{A}$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

3.3 Vector de Posición:

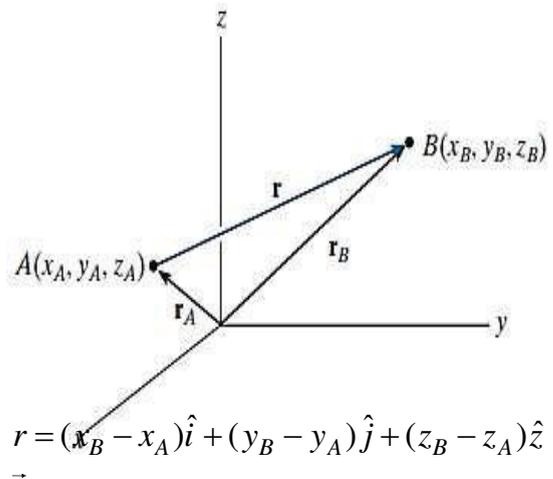
Se define como un vector fijo que localiza un punto en el espacio en relación con otro punto.

Desde el origen hasta un punto P.

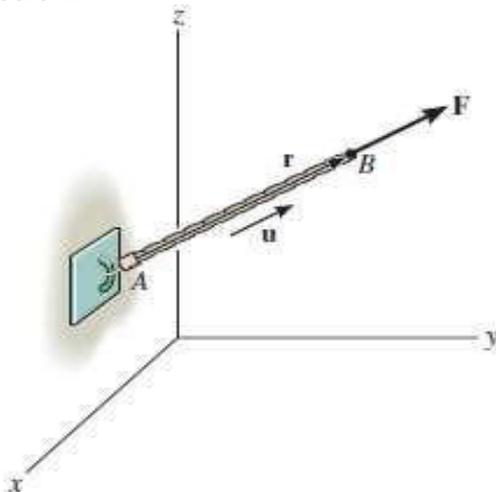


$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Desde un punto A hasta otro punto B.



$$\vec{r} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

3.4 Vector fuerza en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción:


$$\vec{F} = F \cdot \hat{u}_{AB}$$

$$\vec{F} = F \cdot \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$$

3.5 Suma de fuerzas concurrentes en el espacio:

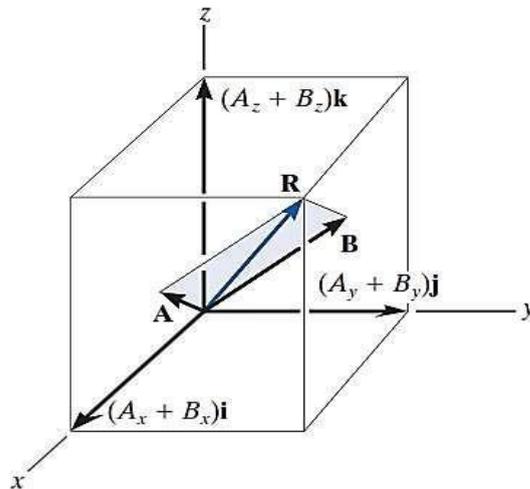
La suma de dos o más vectores se simplifican considerablemente si los vectores se expresan en términos de sus componentes cartesianas.

Dados los vectores:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad \mathbf{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

El vector resultante **R** está dado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$



Si esto se generaliza y se aplica a un sistema de varias fuerzas concurrentes, entonces la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas presentes en el sistema y puede escribirse como:

$$\underline{R} = \sum \underline{F} = (\sum F_x)\underline{i} + (\sum F_y)\underline{j} + (\sum F_z)\underline{k}$$

De la cual se desprende:

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z$$

Luego, la magnitud y dirección de la resultante viene dada por:

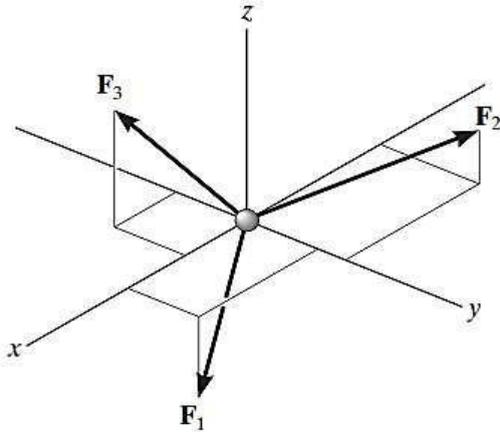
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

3.6 Equilibrio de una partícula en el espacio:



En el caso de un sistema de fuerza tridimensional, como el de la figura siguiente, podemos descomponer las fuerzas en sus respectivas componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , de manera que para el equilibrio se debe cumplir:



$$\sum \vec{F} = (\sum F_x)\mathbf{i} + (\sum F_y)\mathbf{j} + (\sum F_z)\mathbf{k} = 0$$

Para satisfacer esta ecuación se requiere que:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0$$

Por tanto, estas tres ecuaciones establecen que la *suma algebraica* de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula a lo largo de cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

Procedimiento para el análisis del equilibrio de partículas en el espacio:

1º Se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Marque todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas sobre el diagrama.

2º Escribir las ecuaciones de equilibrio. Expresé primero cada fuerza como un vector cartesiano en el diagrama de cuerpo libre, sustituya esos vectores en $\sum \vec{F} = 0$

después iguale a cero las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Si la solución para una fuerza da un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 3

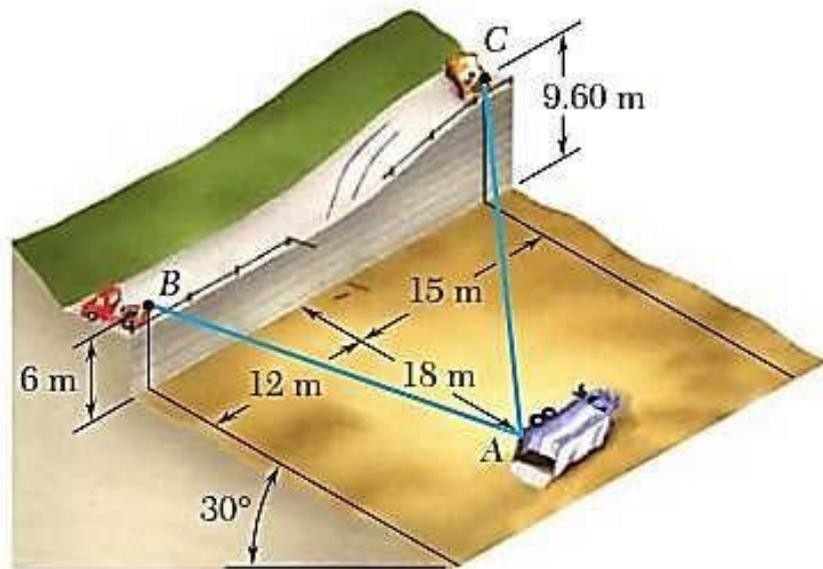
Tema: Fuerzas en el Espacio

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

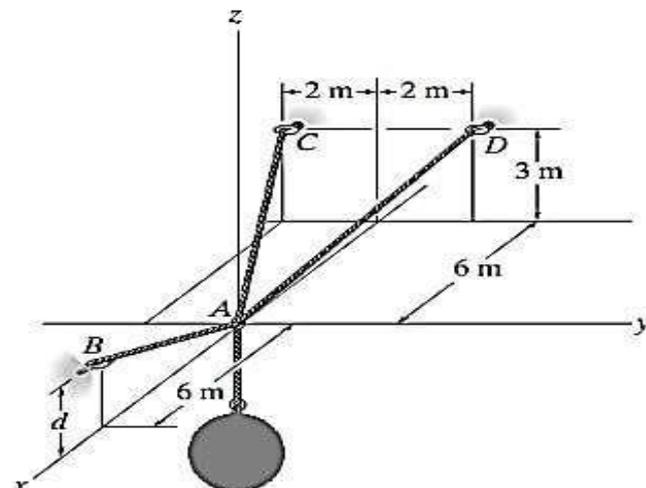
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

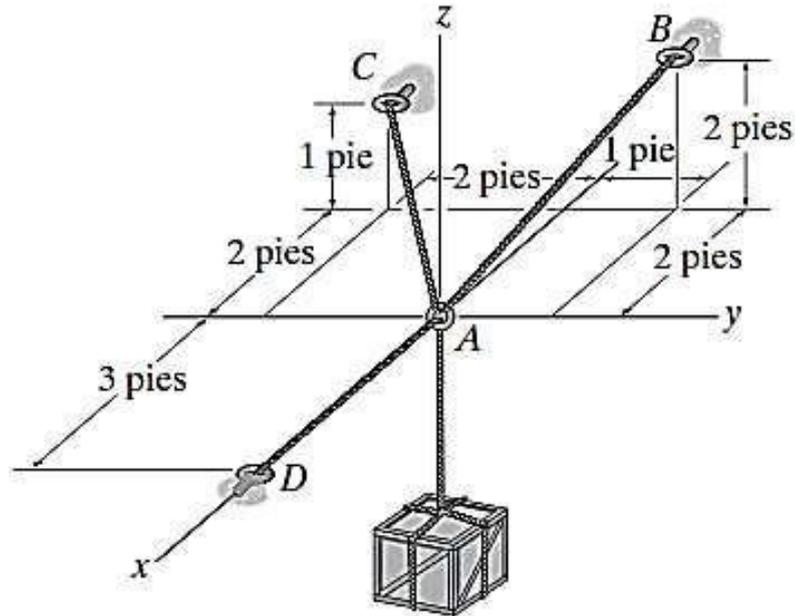
1. A fin de mover un camión volcado, se atan dos cables en A y se jalan mediante las grúas B y C como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 10 kN y en el cable AC es de 7.5 kN, determine la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.



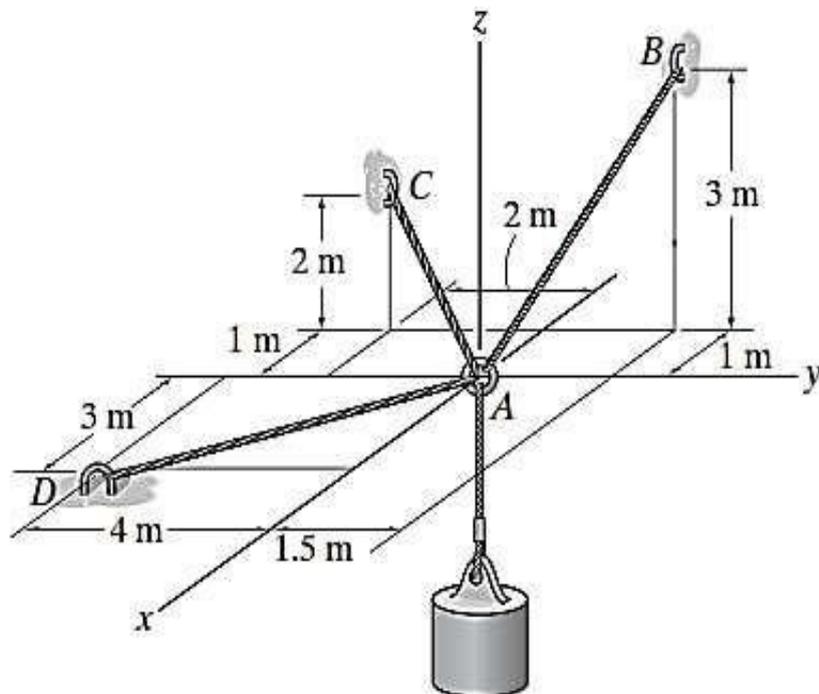
2. Para el sistema mostrado considere la masa de la carga igual a 50 kg. Determine la altura d del cable AB de manera que la fuerza en los cables AD y AC tengan cada una respectivamente la mitad del valor de la fuerza del cable AB.



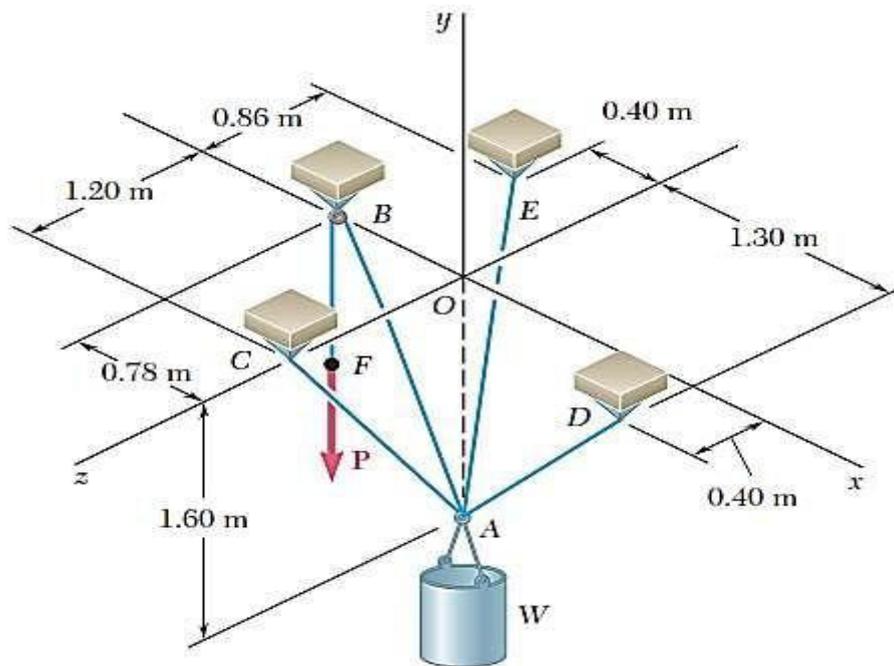
3. Determine el peso máximo de la caja si la tensión desarrollada en cualquiera de los cables no debe exceder 450 lb.



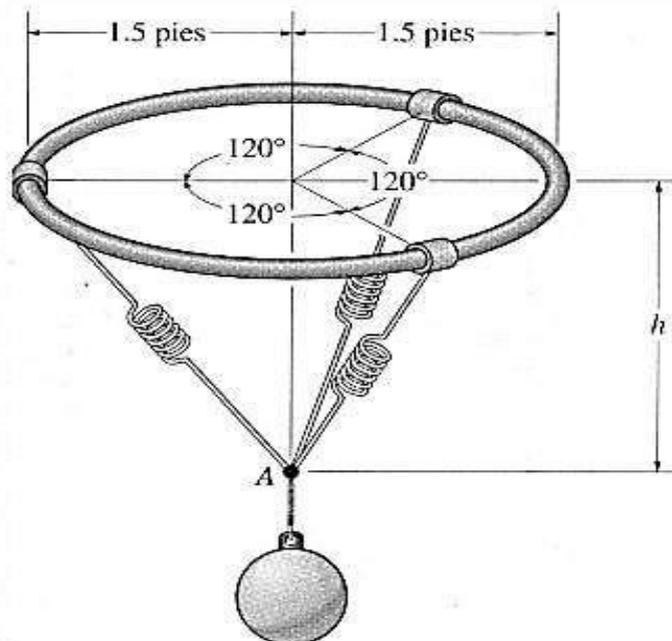
4. Si cada uno de los cables puede soportar una tensión máxima de 1000 N, determine la masa máxima del cilindro para que se pueda mantener el equilibrio.



5. Un contenedor de peso W está suspendido del aro A , al cual se unen los cables AC y AE . Una fuerza \mathbf{P} se aplica al extremo F de un tercer cable que pasa sobre una polea en B y a través del anillo A y que está unido al soporte en D . Si se sabe que $W = 1\,000\text{ N}$, determine la magnitud de \mathbf{P} . (Sugerencia: La tensión es la misma en todos los tramos del cable $FBAD$.)



6. La bola de 80 lb está suspendida del anillo horizontal usando tres resortes, cada resorte tiene longitud no alargada de 1.5 pies y rigidez de 50 lb/pie. Determine la distancia vertical h del anillo hasta el punto A por equilibrio.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

TEMA Nº 4: CUERPOS RIGIDOS



Un *cuerpo rígido* puede considerarse como una combinación de un gran número de partículas donde todas éstas permanecen a una distancia fija entre sí, tanto antes como después de la aplicación de una carga. Este modelo es importante porque las propiedades del material de todo cuerpo que se supone rígido, no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que ocurren en estructuras, máquinas, mecanismos, etcétera, son relativamente pequeñas, y el supuesto de cuerpo rígido resulta adecuado para el análisis.

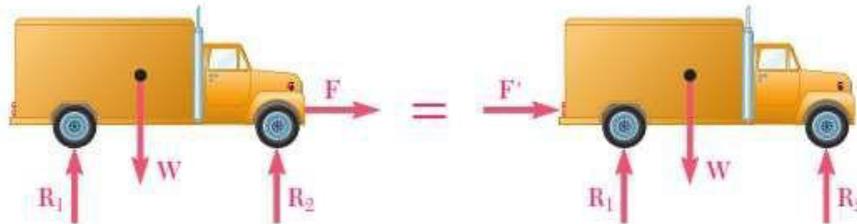
Los efectos de las fuerzas dependen no sólo de sus magnitudes y direcciones, sino también de los *momentos* que ejercen. El momento de una fuerza es una medida de su tendencia a causar giros. Los momentos causan el giro de maquinaria como la manivela de un barco de vela, las ruedas de un vehículo, los cigüeñales y las turbinas. Aun si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, éstas pueden ejercer un momento, que se denomina par. Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas externas y pares actuantes en él es igual a cero. Antes de continuar con el estudio del diagrama de cuerpo libre y del equilibrio, es necesario conocer sobre los momentos, los pares, y el concepto de sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.

4.1 Cuerpos Rígidos y Principio de Transmisibilidad.

En toda la línea de acción de una fuerza su efecto externo ejercido, sobre un cuerpo rígido, es invariable. Luego, el Principio de Transmisibilidad establece que las condiciones de equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza F que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza F' que tiene la misma magnitud, dirección y sentido,

pero que actúa en un punto distinto, siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción.

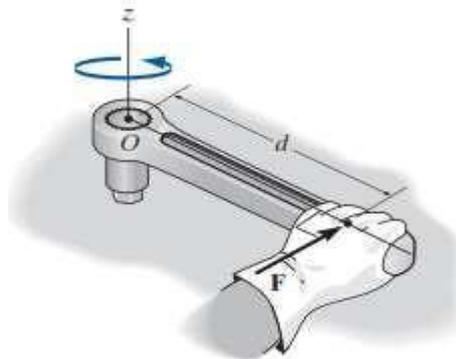
Las dos fuerzas, F y F' , tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son equivalentes. Las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de ben ser representadas por una clase de vector diferente, el *vector deslizante*.



4.2 Momento de una fuerza

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, ésta producirá una tendencia a que el cuerpo gire alrededor de un punto que no está en la línea de acción de la fuerza. Esta tendencia a girar se conoce en ocasiones como *par de torsión*, pero con mayor frecuencia se denomina el momento de una fuerza o simplemente el *momento*. Tal es el caso de la llave de torsión que se usa para desenroscar el perno de la figura adjunta. Si se aplica una fuerza al maneral de la llave ésta tenderá a girar el perno alrededor del punto O (o el eje z).

La magnitud del momento es directamente proporcional a la magnitud de \mathbf{F} y a la distancia perpendicular o *brazo de momento* d . Cuanto más grande sea la fuerza o más grande sea el brazo de momento, mayor será el momento o el efecto de giro. Las unidades del momento son el producto de las unidades de fuerza y distancia, es decir, $N.m$ o $lb.pie$.



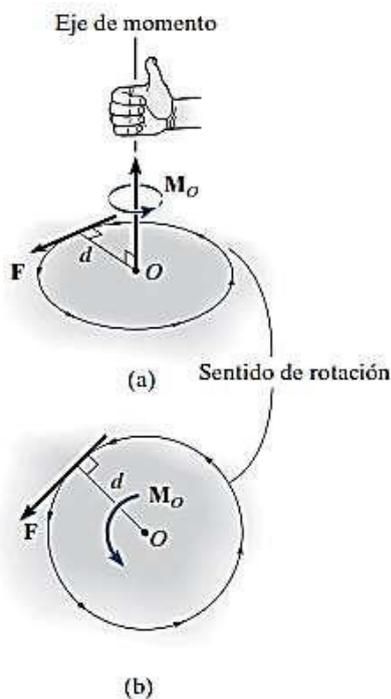
4.3 Formulación escalar del momento de una fuerza con respecto a un punto:

Considerando la figura siguiente, el vector momento \mathbf{M}_O con respecto al punto O , o con respecto a un eje que pase por O y sea perpendicular al plano, tiene magnitud y dirección específicas.

Magnitud. La magnitud de \mathbf{M}_O es:

$$M_o = Fd$$

donde d representa el *brazo de momento* o *distancia perpendicular* desde el eje en el punto O hasta la línea de acción de la fuerza.



Dirección. La dirección de \mathbf{M}_o está definida por su *eje de momento*, el cual es perpendicular al plano que contiene la fuerza \mathbf{F} , y por su brazo de momento d .

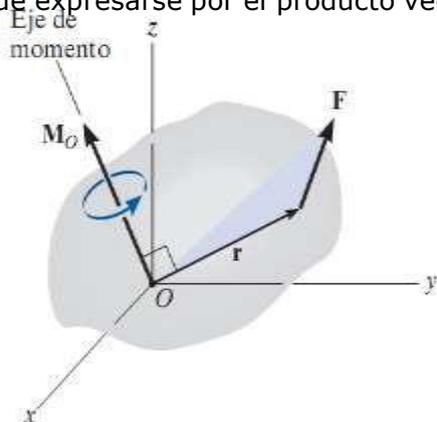
Para establecer el sentido de dirección de \mathbf{M}_o se utiliza la regla de la mano derecha. De acuerdo con esta regla, el curvado natural de los dedos de la mano derecha cuando éstos se doblan sobre la palma representa la tendencia para la rotación.

En dos dimensiones, este vector se representa con la flecha curva como en la figura *b*.

Por consiguiente, el sentido de rotación puede ser anti horario (positivo) u horario (negativo)

4.4 Formulación vectorial del momento de una fuerza respecto a un punto:

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto al punto O , es decir, con respecto al eje del momento que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a O y a \mathbf{F} , puede expresarse por el producto vectorial.



$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

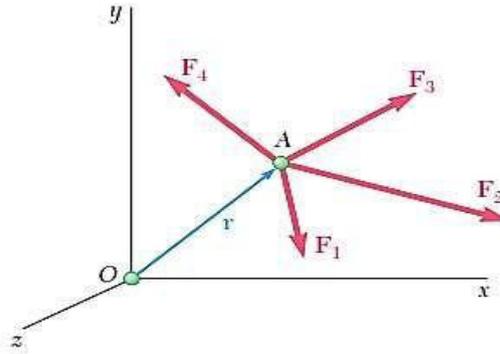
$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Aquí \vec{r} representa un vector de posición trazado desde O hasta cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de \mathbf{F}

4.5 Principio de momentos o Teorema de Varignon:

“El momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O ”.

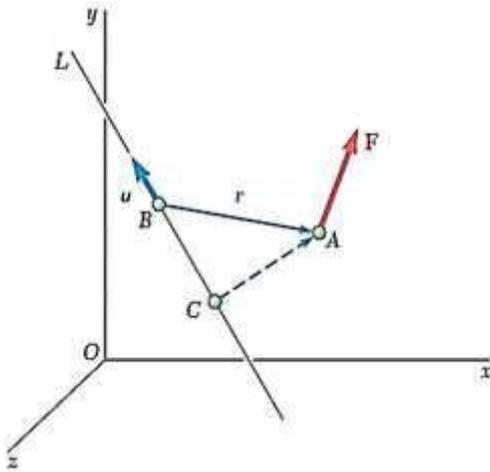
$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots$$



4.6 Momento de una fuerza con respecto a un eje:

El momento de una fuerza respecto a un eje L se puede obtener:

$$M_{eje} = \vec{\mu} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$



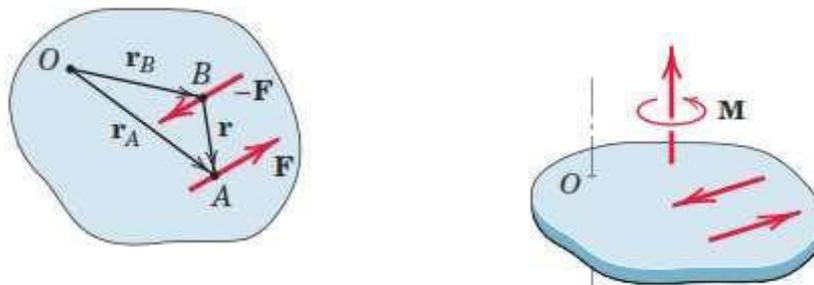
$\vec{\mu}$ es el vector unitario del eje L

\vec{r} es el vector de posición trazado desde cualquier punto del eje a un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza.

$$M_{eje} = \begin{vmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

4.7 Momento de un par

Se dice que *dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par*. Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originarán una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, éstas sí tenderán a hacer lo rotar.



$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

El momento de un par se da por la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto O :

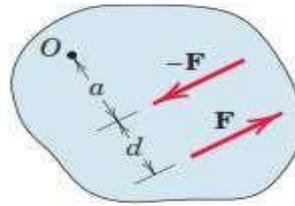
\mathbf{r} : Vector de posición que va del punto B al punto A cualesquiera.

En la siguiente figura se verifica que la magnitud del momento par está dada por:



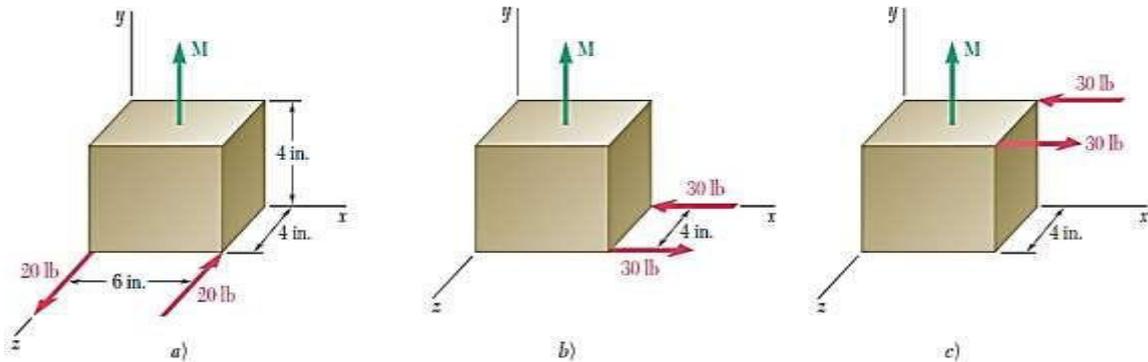
$$M = F(a + d) - Fa$$

$$M = Fd$$



4.8 Pares equivalentes

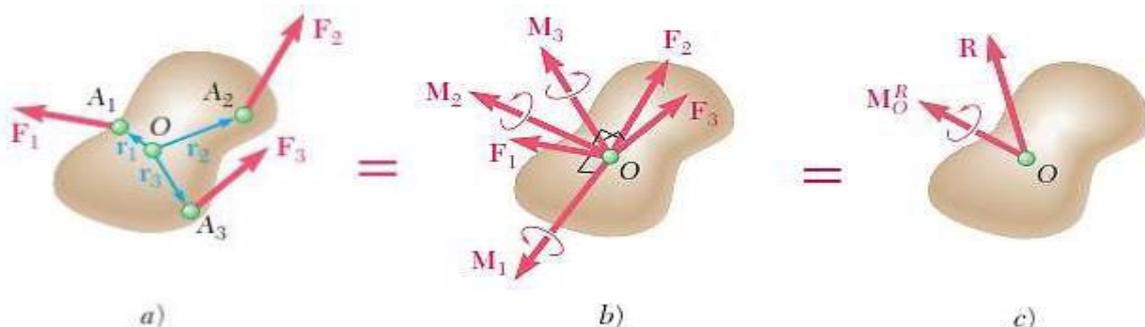
Se sabe que los vectores momento de los pares son vectores libres, se pueden sumar o restar independientemente de su posición en el espacio. Luego, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento \mathbf{M} (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120 \text{ lb} \cdot \text{in}$), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.



4.8 Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema equivalente de fuerza y momento par.

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, \dots , definidos por los vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$ (figura a). La fuerza \mathbf{F}_1 puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O , si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento \mathbf{M}_1 , igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de \mathbf{F}_1 con respecto a O . Si se repite este procedimiento con $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, se obtiene el sistema mostrado en la figura b, que consta de: las fuerzas originales, ahora actuando en O , y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante \mathbf{R} . De manera similar, los vectores de par $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$ pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector par \mathbf{M}_O^R . Por tanto cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un Sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado O . (figura c).

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 4

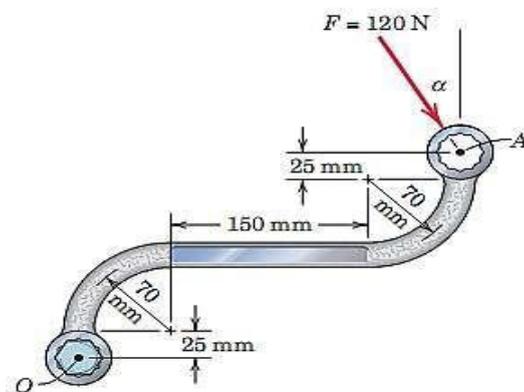
Tema: Cuerpos Rígidos

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

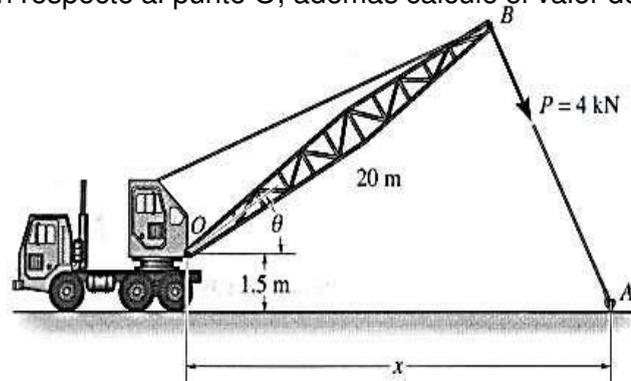
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

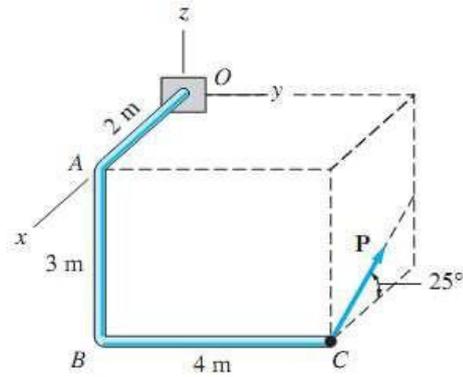
- La fuerza de 120 N es aplicada como se muestra en A. Determinar:
 - Si, $\alpha = 30^\circ$ el momento de F respecto al centro O del perno.
 - El valor del ángulo α , que produce el máximo momento de F respecto de O, también la magnitud de dicho momento.



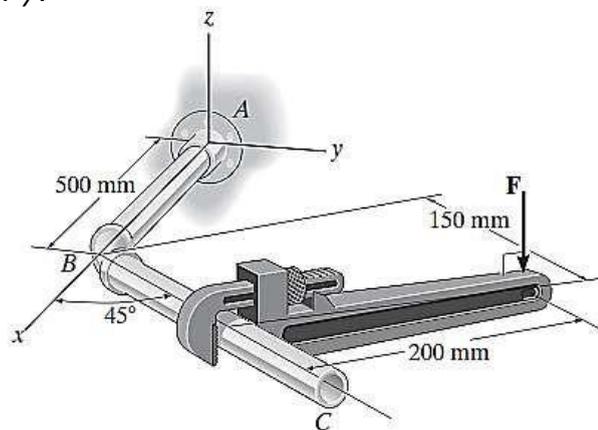
- El cable del remolque ejerce una fuerza $P = 4\text{ kN}$ en el extremo del aguilón de 20m de longitud de la grúa.
 - Si el ángulo $\theta = 30^\circ$, determine la posición x del gancho localizado en A de modo que esta fuerza produzca el máximo momento con respecto al punto O, además calcule el valor de este momento.
 - Si $x=25\text{ m}$, determine el ángulo θ de modo que esta fuerza produzca un momento máximo con respecto al punto O, además calcule el valor de este momento.



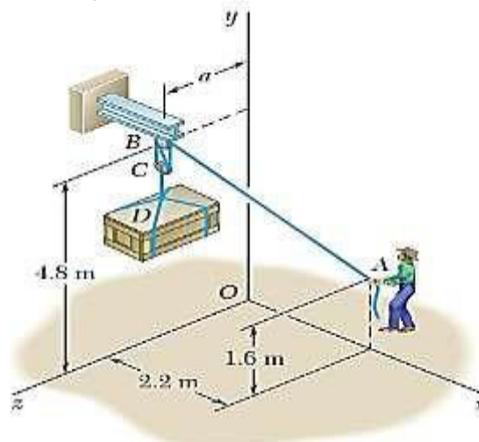
- La magnitud del momento de fuerza de P respecto al punto O es 200 kN.m. Determine:
 - La magnitud de P.
 - La magnitud del momento de fuerza de P respecto al eje z.



4. Determine la magnitud de la fuerza vertical \mathbf{F} que actúa sobre el maneral de la llave si produce una componente de momento a lo largo del eje AB (eje x) de la tubería de $(M_A)_x = \{-5\mathbf{i}\}$ N.m. Tanto la llave como el ensamble de tubos ABC , se encuentran en el plano x - y .



5. Para levantar una pesada caja, un hombre usa un bloque y un polipasto y los sujeta a la parte inferior de la viga I mediante el gancho B. Si se sabe que los momentos, de los ejes y y z , de la fuerza ejercida en B por el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de 120 N.m y -460 N.m, determine la distancia a .



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

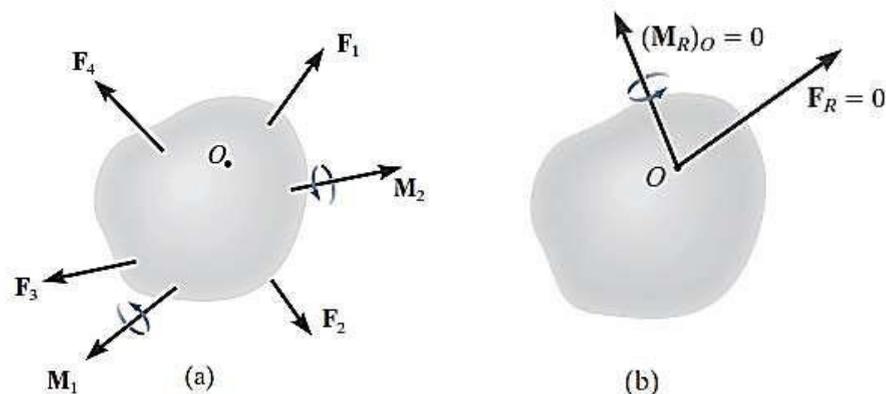
SEGUNDA UNIDAD

TEMA N° 5: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS



Ya hemos aprendido que la estática es el análisis de cuerpos en equilibrio, incluidos los puentes, las presas y los edificios. Ahora que ya hemos aprendido a calcular momentos, podemos enfrentarnos a problemas de equilibrio más interesantes. En este tema establecemos las ecuaciones de equilibrio y describimos modelos sencillos de los diversos tipos de soportes utilizados en ingeniería. Luego mostramos cómo usar las ecuaciones de equilibrio para obtener información respecto a los sistemas de fuerzas y momentos que actúan sobre los cuerpos.

5.1 Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido



El sistema mostrado de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo (figura a) puede reducirse a una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en cualquier punto arbitrario O sobre el cuerpo o fuera de él (figura b). La condición para el equilibrio es que tanto la fuerza como el momento de par resultantes sean iguales a cero. Matemáticamente, el equilibrio de un cuerpo se expresa como:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

- ✓ La primera de estas ecuaciones establece que la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a *cero*. Ello verifica *traslación nula*.
- ✓ La segunda ecuación establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas en el sistema con respecto al punto *O*, añadida a todos los momentos de par es igual a *cero*. Con lo cual se verifica *rotación nula*.

5.2 Equilibrio en dos dimensiones:

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos. Por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre diferentes vigas y estructuras planas, pinzas, algunas grúas y otras máquinas, así como ciertos tipos de puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

Ecuaciones escalares de equilibrio en dos dimensiones.

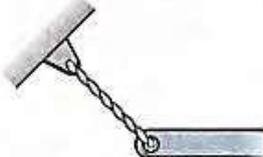
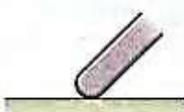
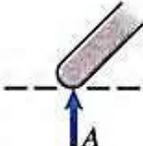
Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema bidimensional de fuerzas y momentos (momentos perpendiculares al plano), se encuentran relacionadas por tres ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_{\text{cualquier punto}} = 0$$

Soportes:

Algunos tipos muy comunes de soportes se representan con modelos estilizados llamados convenciones de soporte. Los soportes reales a menudo se parecen a los modelos estilizados; pero, aunque no se parecieran, los representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones
 <p>Cuerda o cable</p>  <p>Resorte</p>	 <p>Una fuerza colineal</p>
 <p>Contacto con una superficie lisa</p>	 <p>Una fuerza normal</p>

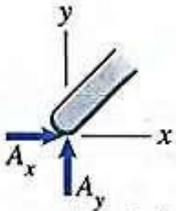
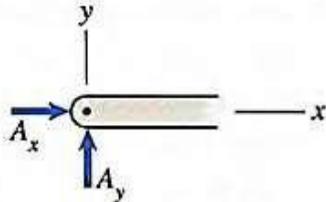
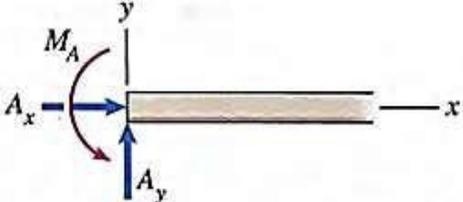
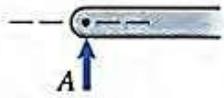
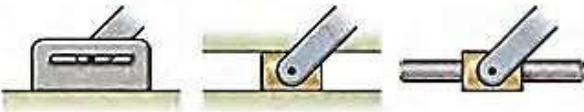
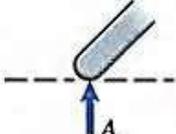
Soportes	Reacciones
 <p data-bbox="328 450 791 483">Contacto con una superficie rugosa</p>	 <p data-bbox="948 450 1310 483">Dos componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="424 723 679 757">Soporte de pasador</p>	 <p data-bbox="943 723 1305 757">Dos componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="427 1016 679 1050">Soporte empotrado</p>	 <p data-bbox="887 1016 1374 1050">Dos componentes de fuerza y un par</p>
 <p data-bbox="427 1182 667 1216">Soporte de rodillo</p> <p data-bbox="402 1352 689 1386">Soportes equivalentes</p>	 <p data-bbox="1007 1263 1257 1296">Una fuerza normal</p>
 <p data-bbox="363 1592 737 1626">Pasador guiado o deslizador</p>	 <p data-bbox="1011 1588 1262 1621">Una fuerza normal</p>

Diagrama de cuerpo libre:

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido o cualquier grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deben darse los siguientes pasos:

1º *Trace el contorno:*

Idealice el cuerpo *aislado* o recortado "libre" de sus restricciones y conexiones, y delinee (en un bosquejo) su contorno.

2º Muestre todas las fuerzas y momentos de par.

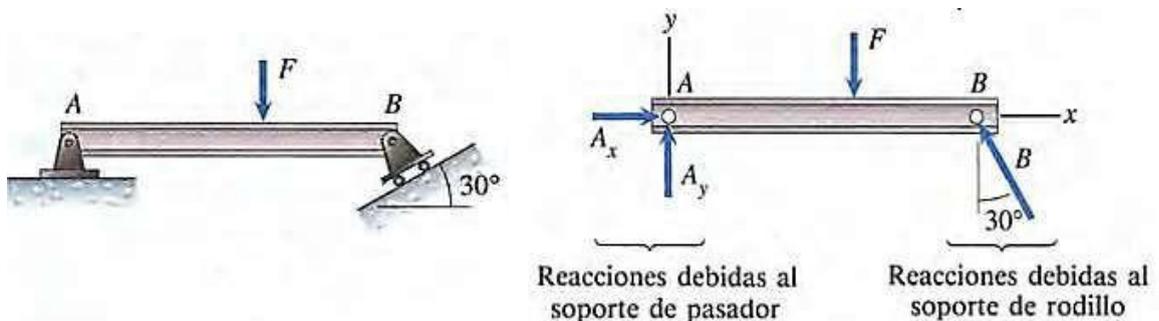
Identifique todas las *fuerzas externas* conocidas y desconocidas y los momentos de par que *actúan sobre el cuerpo*. Las que por lo general se encuentran se deben a (1) cargas aplicadas, (2) reacciones que ocurren en los soportes o en puntos de contacto con otros cuerpos, y (3) el peso del cuerpo.

3º Identifique cada carga y las dimensiones dadas.

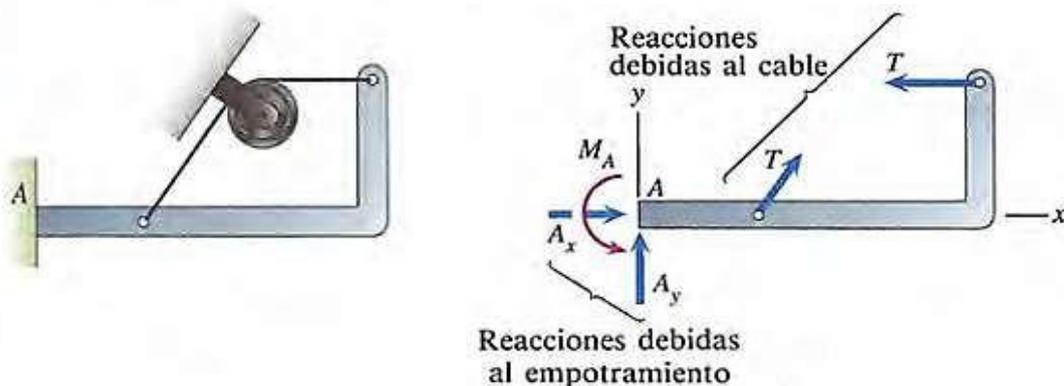
Las fuerzas y los momentos de par que se conocen deben marcarse con sus propias magnitudes y direcciones. Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

Ejemplos de DCL:

a) Viga ingrávida soportada por un pasador y un rodillo.



b) Cuerpo ingrávido soportado por un empotramiento y un cable unido a él en dos puntos.



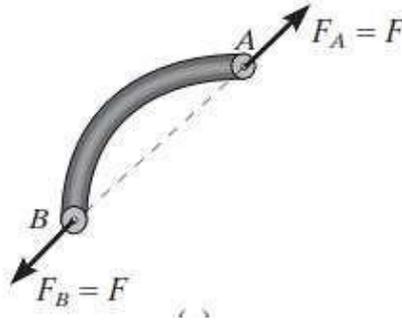
5.3. Equilibrio en elementos de dos y tres fuerzas.

Elemento de dos fuerzas:

El elemento tiene fuerzas aplicadas en sólo dos puntos sobre el elemento. Un ejemplo

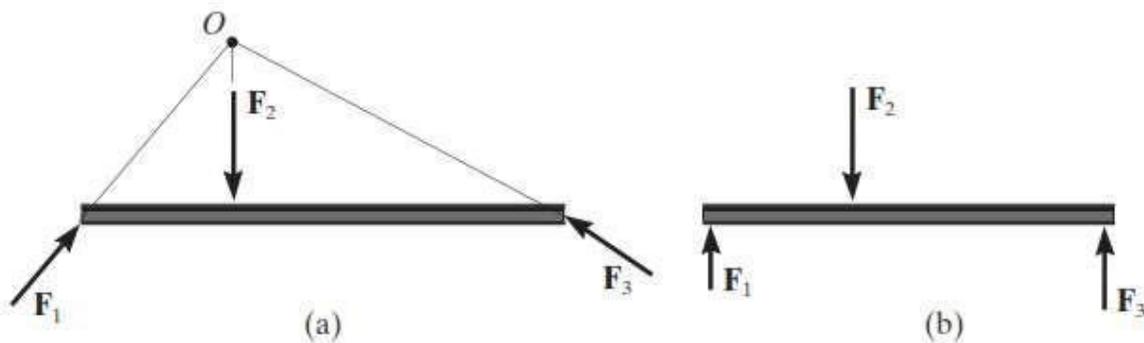
se muestra en la figura adjunta. Para satisfacer el equilibrio de fuerzas, \mathbf{F}_A y \mathbf{F}_B deben tener la misma magnitud, $F_A = F_B = F$, pero dirección opuesta.

Por lo tanto, para que cualquier elemento de dos fuerzas esté en equilibrio, las dos fuerzas que actúan sobre él *deben tener la misma magnitud, actuar en direcciones opuestas y tener la misma línea de acción, dirigida a lo largo de la línea que une los puntos donde actúan estas fuerzas.*



Elemento de tres fuerzas:

Si un elemento está sometido a sólo *tres fuerzas*, se denomina *elemento de tres fuerzas*. El equilibrio de momento se puede satisfacer sólo si las tres fuerzas forman un Sistema de fuerzas *concurrentes* o *paralelas*. Para ilustrar esto, considere el elemento sometido a las tres fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 , que se muestra en la figura a. Si las líneas de acción de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 se intersectan en el punto O , entonces la línea de acción de \mathbf{F}_3 también debe pasar por el punto O , de modo que las fuerzas satisfagan $\sum M_o = 0$. Como caso especial si las tres fuerzas son paralelas, figura b, la ubicación del punto de intersección, O , se aproximará al infinito.



Luego, para el caso de elementos a dos y tres fuerzas analizar el equilibrio implica establecer ecuaciones que no requiere del trazo de vectores componentes siendo su solución respaldada por la geometría del problema.

5.4 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el plano:

1º *Diagrama de cuerpo libre.*

- ✓ Establezca los ejes x , y en cualquier orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

2º *Aplique las ecuaciones de equilibrio:* $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_{\text{cualquier punto}} = 0$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo. Los momentos de par son positivos si tienen rotación antihoraria.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 5

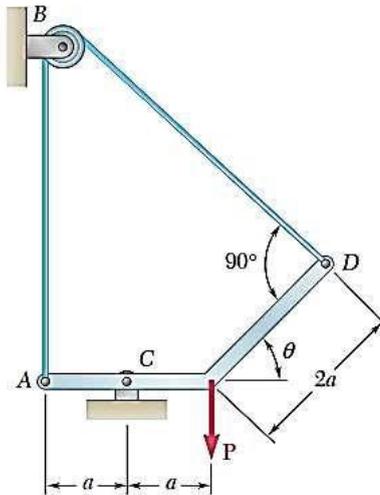
Tema: Equilibrio de Cuerpos Rígidos en 2D

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

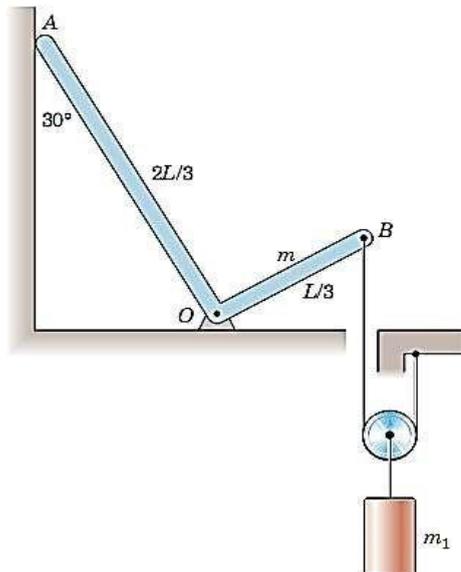
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

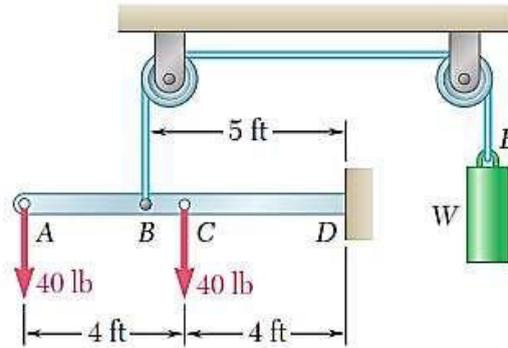
- Sin tomar en cuenta la fricción determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C, cuando $\theta = 60^\circ$.



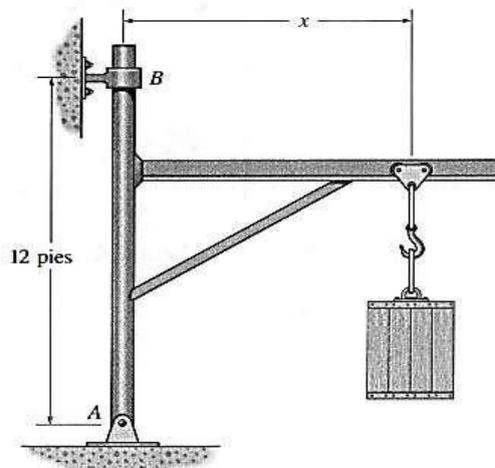
- Determine la mínima masa m_1 del cilindro requerida para causar la pérdida de contacto en A.



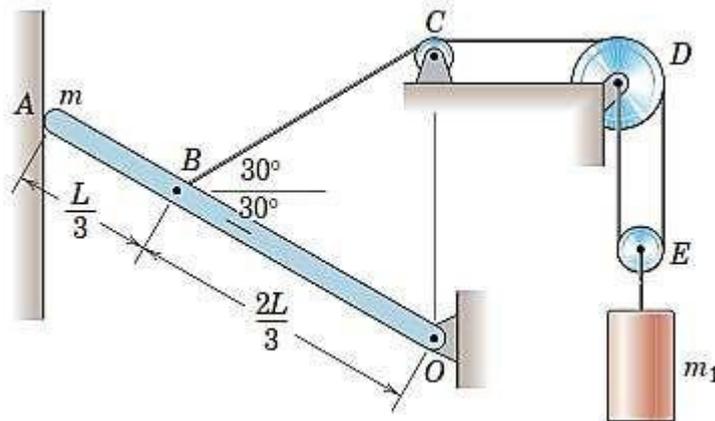
- Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de W para los que la magnitud del par en D no excede 40 lb.ft.



4. La grúa está conectada mediante un pasador colocado en A y sujeta en B por un collar liso. Determine la posición x del gancho, que lleva una carga de 5000 lb, tal que genere las reacciones máximas y mínimas en los soportes. Calcule esas reacciones en cada caso. Ignore el peso de la grúa. Considere: $4 \leq x \leq 10$ pies.



5. Determine una expresión general para la fuerza normal N_A ejercida por la pared vertical lisa sobre la barra delgada y uniforme de masa m y longitud L . La masa del cilindro es m_1 , considere las poleas ideales. Determine además el valor de m_1 para el cual se cumple que a) $N_A = mg/2$ y b) $N_A = 0$



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 6: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES



Hemos visto que cuando un cuerpo en equilibrio está sometido a un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, no se pueden obtener más de tres ecuaciones independientes de equilibrio. En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se pueden obtener hasta seis ecuaciones independientes de equilibrio: las tres componentes de la suma de las fuerzas deben ser nulas y las tres componentes de la suma de los momentos respecto a cualquier punto deben también ser iguales a cero.

El procedimiento para determinar las reacciones sobre cuerpos sometidos a sistemas tridimensionales de fuerzas y momentos -dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio- es el mismo que para el de dos dimensiones. Sólo se requiere familiarizarse con las convenciones de soporte usadas en las aplicaciones tridimensionales.

6.1 Equilibrio en tres dimensiones:

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos en sistemas espaciales, por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre estructuras espaciales, grúas y máquinas, así como techos, puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

Ecuaciones vectoriales de equilibrio en tres dimensiones:

Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden ser expresadas matemáticamente en forma vectorial como:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= 0 \\ \sum \vec{M}_O &= 0\end{aligned}$$

donde $\sum \vec{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\sum \vec{M}_O$ es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto O localizado en o fuera del cuerpo.

Ecuaciones escalares de equilibrio en tres dimensiones.

Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se encuentran relacionadas por

seis ecuaciones escalares de equilibrio:

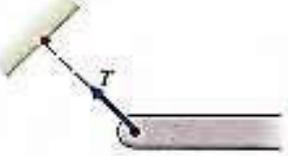
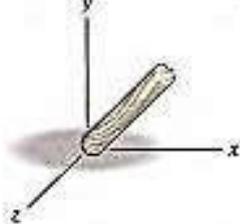
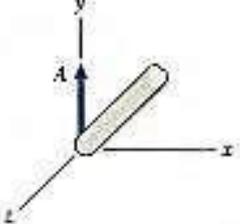
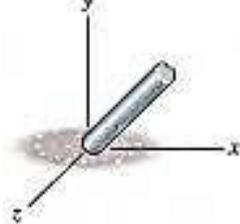
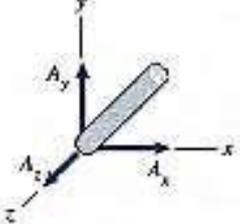
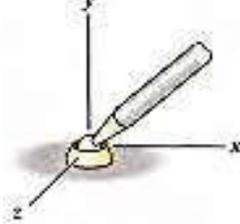
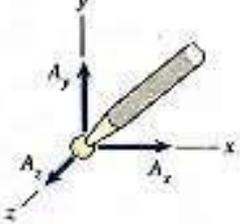
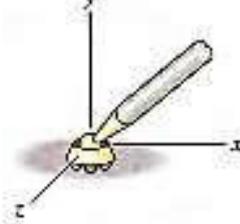
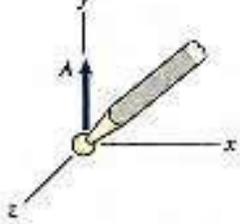
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

Al usar estas seis ecuaciones escalares de equilibrio se puede resolver cuando mucho seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre.

Soportes:

Aún cuando los soportes reales no se parezcan físicamente a los modelos representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones
 <p data-bbox="502 795 662 824">Cuerda o cable</p>	 <p data-bbox="949 795 1141 824">Una fuerza colineal</p>
 <p data-bbox="438 1097 774 1126">Contacto con una superficie lisa</p>	 <p data-bbox="949 1097 1141 1126">Una fuerza normal</p>
 <p data-bbox="422 1388 790 1417">Contacto con una superficie rugosa</p>	 <p data-bbox="885 1388 1173 1417">Tres componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="470 1680 742 1709">Soporte de bola y cuenca</p>	 <p data-bbox="901 1680 1189 1709">Tres componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="502 1971 694 2000">Soporte de rodillos</p>	 <p data-bbox="949 1971 1141 2000">Una fuerza normal</p>

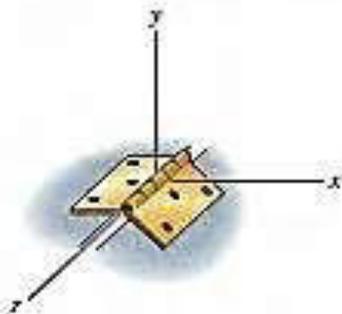
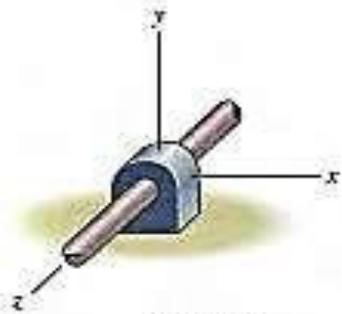
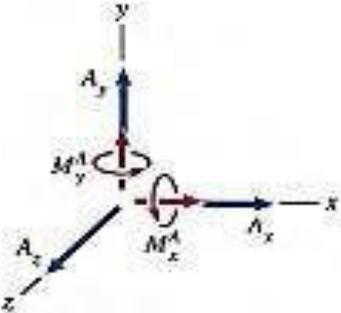
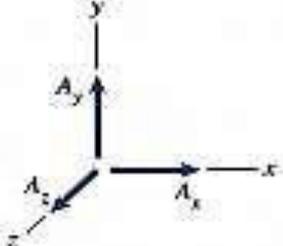
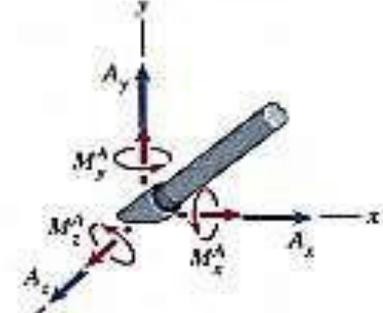
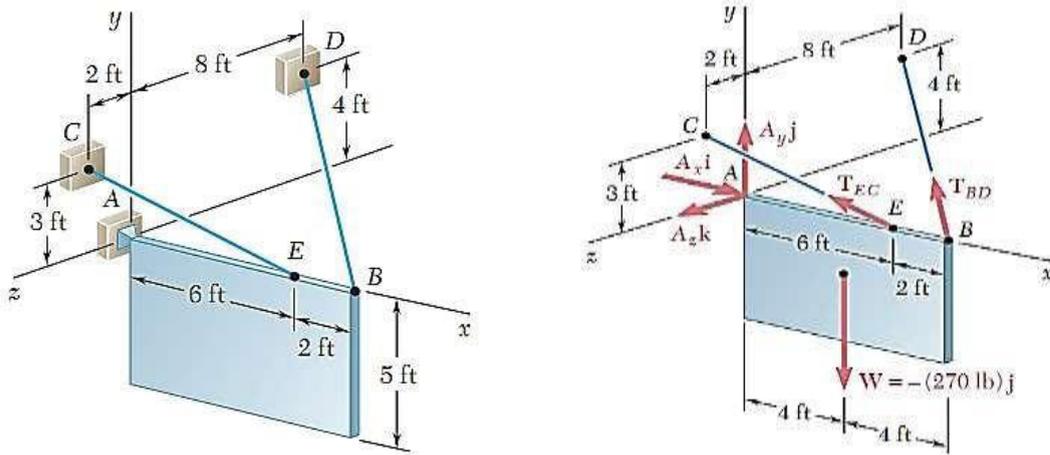
Soportes	Reacciones
 <p data-bbox="470 654 726 734">Articulación (el eje z es paralelo al eje de la articulación)</p>  <p data-bbox="470 1214 785 1294">Cojinete (El eje z es paralelo al eje del árbol soportado)</p>	 <p data-bbox="965 631 1300 689">Tres componentes de fuerza, dos componentes de par</p>  <p data-bbox="938 981 1300 1016">(Cuando no se generan pares)</p>  <p data-bbox="986 1317 1264 1375">(Cuando no se generan pares ni fuerza axial)</p>
 <p data-bbox="470 1774 705 1809">Soporte empotrado</p>	 <p data-bbox="965 1774 1316 1832">Tres componentes de fuerza, Tres componentes de par</p>

Diagrama de cuerpo libre:

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido en tres dimensiones procedemos en forma análoga al análisis en dos dimensiones con las consideraciones de los soportes tridimensionales.

Ejemplo: Para el letrero de densidad uniforme, apoyado en una rótula esférica en A y sujetado por cables en B y E.



6.2 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el espacio:

1º Diagrama de cuerpo libre.

- ✓ Establezca los ejes x , y y z en una orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Muestre las componentes desconocidas con un sentido positivo a lo largo de los ejes x , y y z .
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

2º Aplique las ecuaciones de equilibrio.

- ✓ Según la conveniencia se deben aplicar las ecuaciones escalares o las ecuaciones vectoriales.
- ✓ En ocasiones serán necesarios usar ejes de dirección arbitraria para realizar la suma de fuerzas y momentos.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 6

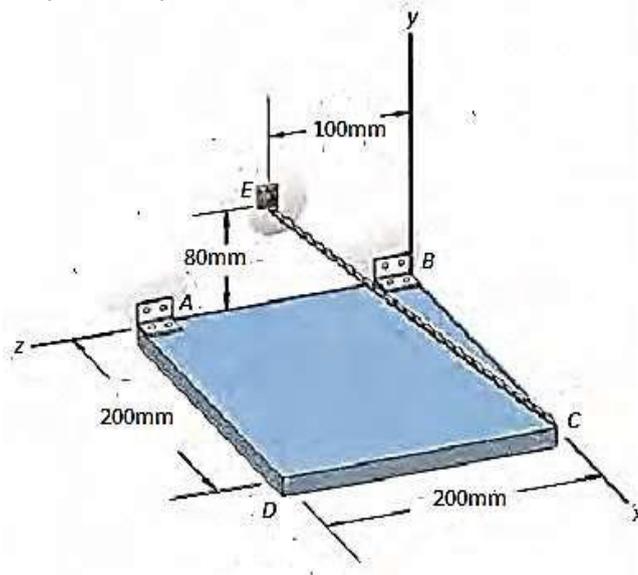
Tema: Equilibrio de Cuerpos Rígidos en 3D

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar
 Semana

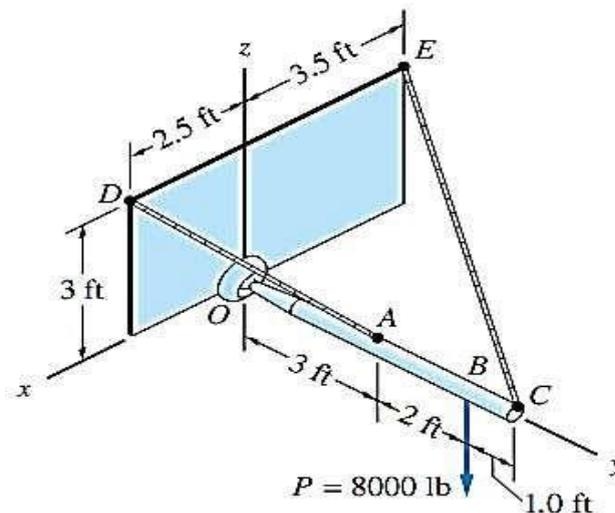
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

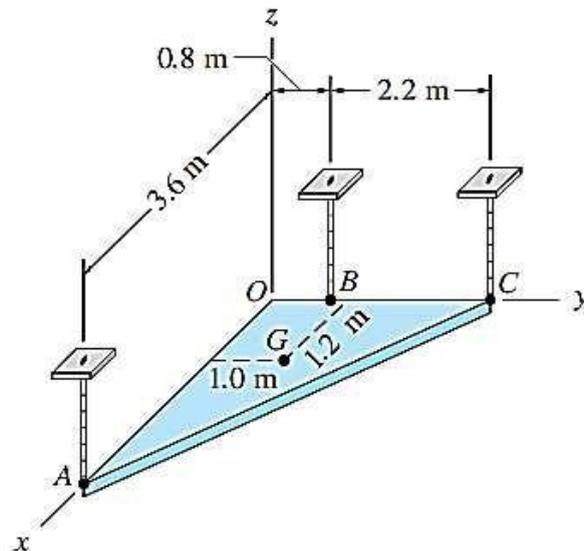
- En la figura la placa está soportada por bisagras en A y en B, también por el cable CE. Las bisagras, propiamente alineadas, no generan pares sobre la placa, y la bisagra en A no genera una fuerza sobre la placa en la dirección del eje de la bisagra, además la magnitud del momento de la tensión en la cuerda respecto al eje z no debe ser mayor de 337Nm. Determine para tal condición el peso máximo de la placa que puede ser soportado por el sistema.



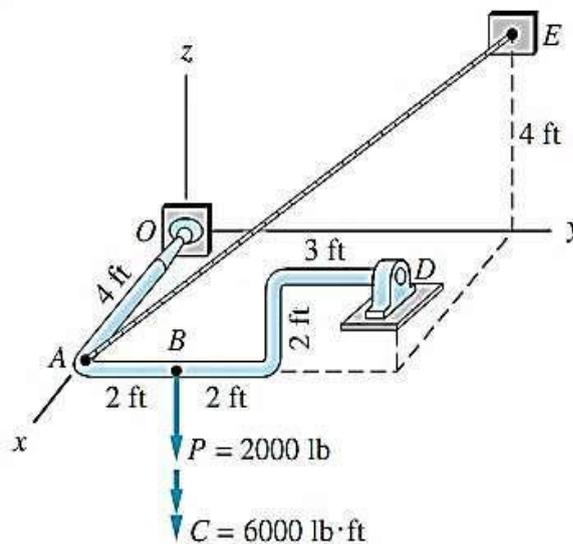
- El elemento horizontal de peso despreciable está sujeto por una rótula en O, determine las magnitudes de las tensiones en los cables y la magnitud de la reacción en O.



3. La placa de peso W con centro de gravedad en G es soportada en el plano horizontal como se muestra, determine las magnitudes de cada una de las tensiones y el peso máximo a soportar si la tensión que soportan los cables no debe exceder a 27.3 kN.



4. El elemento de peso despreciable es soportado por una rótula en O , un cable AE y un cojinete de empuje (que no genera pares). Sobre la barra actúan una fuerza P y un par C , ambos paralelos al eje x . Determine las magnitudes de las reacciones en D y en O , así como la tensión en el cable.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TERCERA UNIDAD

TEMA N° 7: CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD

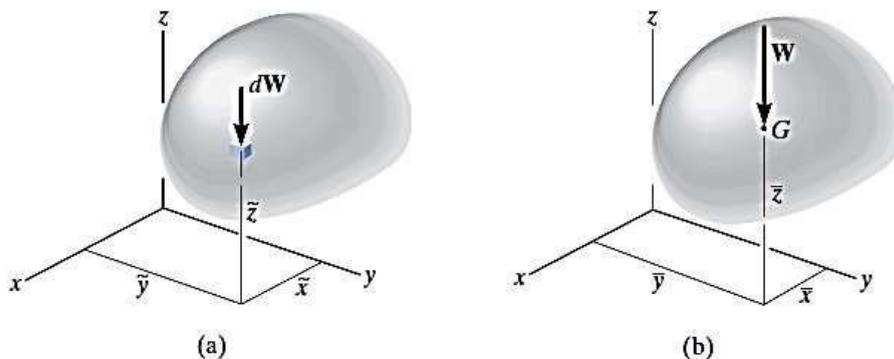


8.1 Centro de gravedad, centro de masa y centroide de un cuerpo.

A continuación, mostraremos en primer lugar cómo localizar el centro de gravedad para un cuerpo y después deduciremos que el centro de masa y el centroide de un cuerpo pueden desarrollarse con este mismo método.

Centro de gravedad.

Un cuerpo está compuesto de un número infinito de partículas de tamaño diferencial, y por tal razón si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso dW , figura *a*. Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa a través de un solo punto llamado el *centro de gravedad*, G , figura *b*. Esto es cierto mientras se suponga que el campo de gravedad tiene la misma magnitud y dirección en todas partes. Ese supuesto es apropiado para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, ya que la gravedad no varía apreciablemente entre, por ejemplo, la parte inferior y la superior de un edificio.



Se sabe que el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z;$$

$$W = \int dW$$

MECÁNICA

La ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje y , se determina al igualar el momento de W con respecto al eje y , figura b , con la suma de los momentos de los pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si dW se ubica en el punto :

x, y, z figura a , entonces:

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{x}W = \int \tilde{x}dW$$

De la misma manera, si se suman los momentos con respecto a los ejes x y y :

$$\begin{aligned} (M_R)_x &= \Sigma M_x; & \bar{y}W &= \int \tilde{y}dW \\ (M_R)_y &= \Sigma M_y; & \bar{z}W &= \int \tilde{z}dW \end{aligned}$$

Luego, la ubicación del centro de gravedad G con respecto a los ejes x , y y z es:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW}$$

$$\mathbf{G} = (x; y; z)$$

Donde:

G = Centro de gravedad

$x; y; z$ = Coordenadas del centro de gravedad

- ✓ El centro de gravedad toma en cuenta los materiales que componen el cuerpo y es el punto donde está aplicada la fuerza resultante equivalente llamada peso W .

Centro de masa:

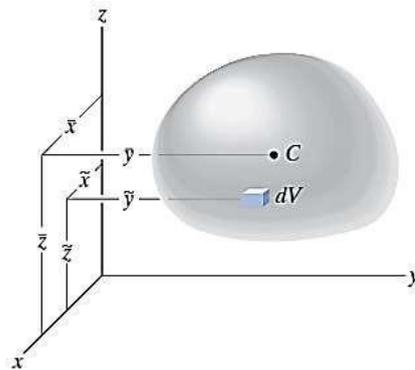
Al sustituir $dW = g dm$ en la ecuación del centro de gravedad obtenemos el centro de masa de un cuerpo. A fin de estudiar la *respuesta dinámica* o el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar este punto.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm}$$

Centroide de un volumen

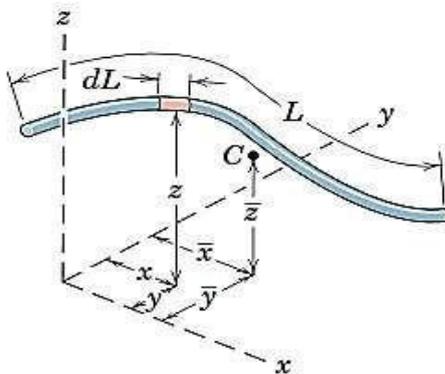
Si el cuerpo de la figura a está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad (ρ_0) será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen dV tiene una masa $dm = \rho_0 dV$. Al sustituir esto en las ecuaciones de centro de masa y al cancelar, obtenemos fórmulas que localizan el *centroide* C o centro geométrico del cuerpo; así:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$



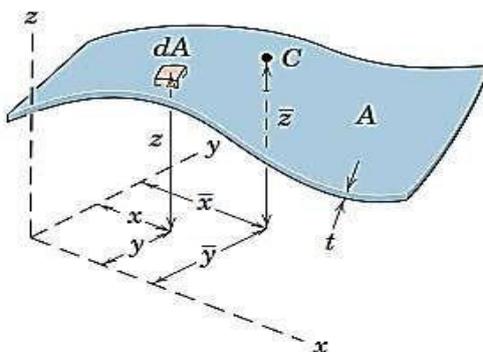
Centroides de Líneas:

Para alambres de sección constante.



$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} \quad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL}$$

Centro de Gravedad de Áreas:



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

Consideraciones importantes.

- ✓ El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo, es una propiedad geométrica y no considera los materiales del cuerpo. El centro de gravedad es una propiedad física y si considera los materiales que componen el cuerpo.
- ✓ Este punto coincide con el centro de masa o con el centro de gravedad sólo si el material que compone el cuerpo es uniforme u homogéneo.
- ✓ Las fórmulas usadas para localizar el centro de gravedad o el centroide simplemente representan un balance entre la suma de momentos de todas las partes del sistema y el momento de la "resultante" para el sistema.
- ✓ En algunos casos, el centroide se ubica en un punto fuera del objeto, como en el caso de un anillo, donde el centroide está en el centro del anillo. Además, este punto se encontrará sobre cualquier eje de simetría del cuerpo.

Centroides de formas comunes de áreas y de líneas.

Forma		x	y	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \text{ sen}\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Forma		x	y	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \text{ sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Determinación de Centroides por Integración

El centro de gravedad o centroide de un objeto o forma, se puede determinar mediante integraciones simples por el siguiente procedimiento.

1º Seleccionar un elemento diferencial.

Seleccione un sistema coordinado apropiado, especifique los ejes coordinados, y luego elija un elemento diferencial para la integración: Para líneas dL , para áreas: dA , con una longitud finita y ancho diferencial, para volúmenes, el elemento puede ser un disco circular de volumen dV , con un radio finito y espesor diferencial.

2º Tamaño y brazos de momento.

Expresar la longitud dL , el área dA , o el volumen dV del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva. Expresar los brazos de momento para el centroide o centro de gravedad del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva.

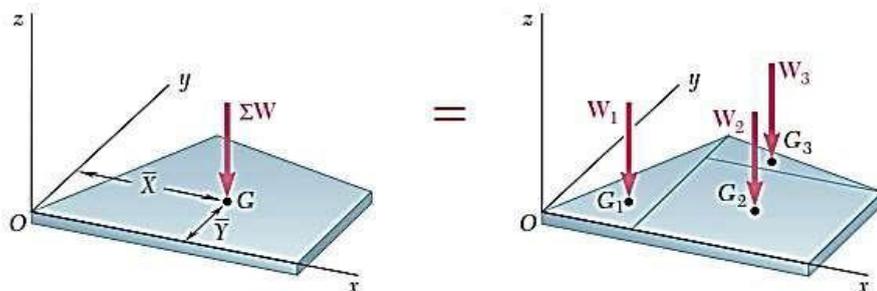
3º Integraciones.

Sustituya las formulaciones para dL , dA o dV en las ecuaciones apropiadas y exprese la función en el integrando en términos de la *misma variable aplicada al espesor del elemento*. Los límites de la integral se definen a partir de las dos ubicaciones extremas del espesor diferencial del elemento, de manera que cuando los elementos se "suman" o la integración se realiza, toda la región queda cubierta.

8.2 Cuerpos compuestos:

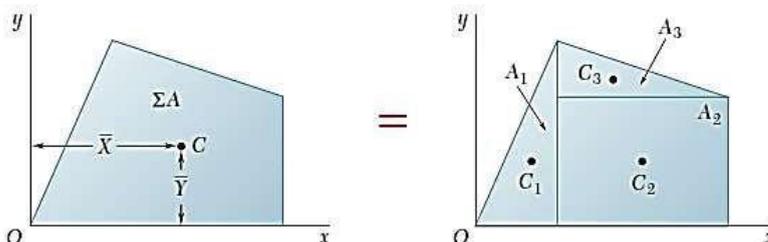
Un *cuerpo compuesto* consiste en una serie de cuerpos "más simples" conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etcétera. Un cuerpo de este tipo a menudo puede ser seccionado o dividido en sus partes componentes y, si se conocen el peso y la ubicación de cada una de esas partes, es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad de todo el cuerpo.

Veamos el caso de una placa mostrada en la figura siguiente:



Procedimiento para determinar el centroide de un cuerpo compuesto:

- 1º Separar el cuerpo en partes de formas conocidas.
- 2º Determinar el centroide de cada parte por separado. Además determinar el área de cada parte y el área total.



3º Las coordenadas del centroide **C** del cuerpo compuesto se determina promediando los centroides de las partes.

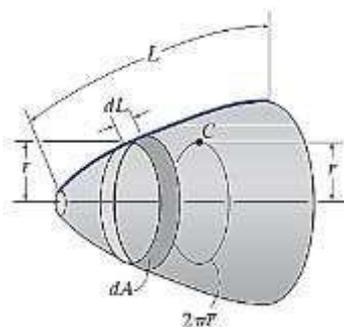
$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

8.2 Teoremas de Pappus-Guldinus

Se utilizan para calcular la superficie y volumen de cualquier objeto de revolución. Una superficie de revolución se crea girando una curva plana con respecto de un eje fijo que no intercepta el plano de la curva; mientras que un volumen de revolución se forma girando el área de un plano con respecto de un eje fijo que no intercepta el plano del área.

PRIMER TEOREMA: El área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz y la distancia viajada por el centroide de la curva al generar el área superficial.

$$A = \theta \bar{r} L$$



A = área superficial de revolución

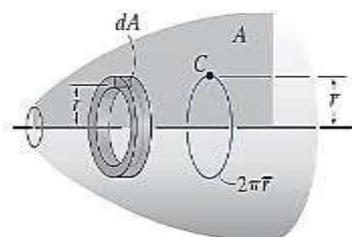
θ = ángulo de revolución medido en radianes, $\theta \leq 2\pi$

\bar{r} = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

L = longitud de la curva generatriz

SEGUNDA TEOREMA: El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.

$$V = \theta \bar{r} A$$



V = volumen de revolución o giro

θ = ángulo de revolución medido en radianes, $\theta \leq 2\pi$

\bar{r} = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

A = área generatriz

También podemos aplicar los dos teoremas anteriores a líneas o áreas que están integradas por una serie de partes componentes. En este caso, el área superficial total o el volumen generado es la suma de las áreas superficiales o volúmenes generados por cada una de las partes componentes.

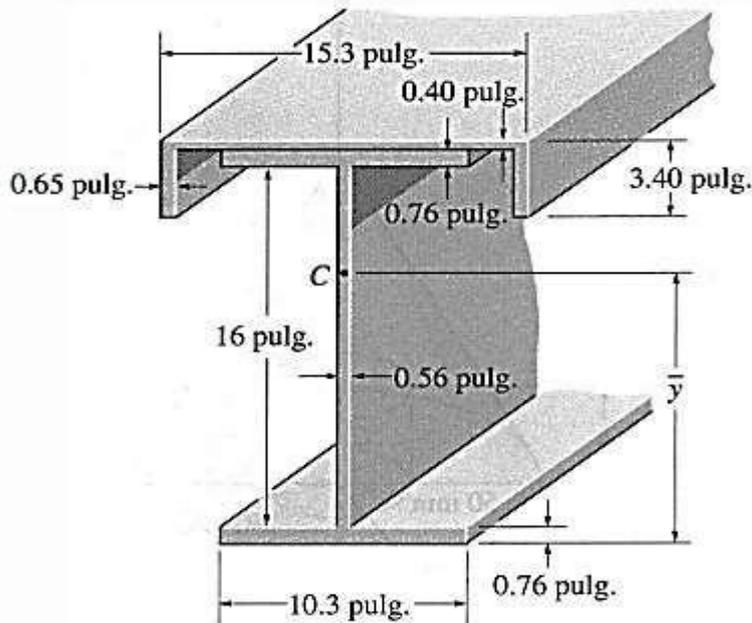
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 7
Tema: Centroides y Centro de gravedad

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

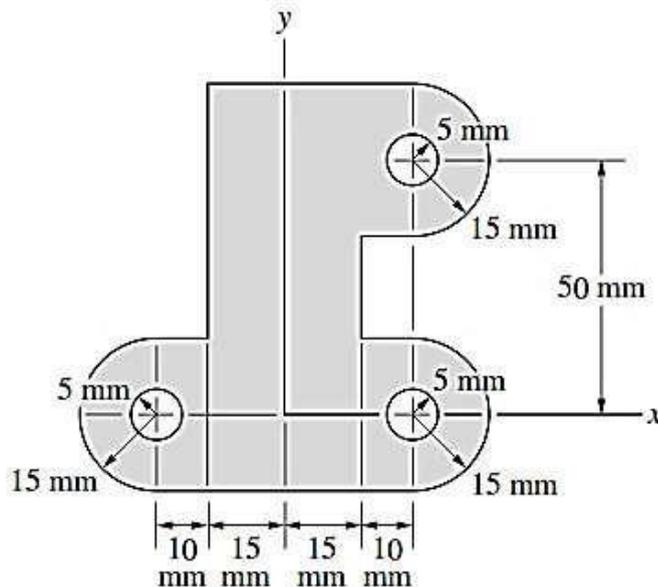
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

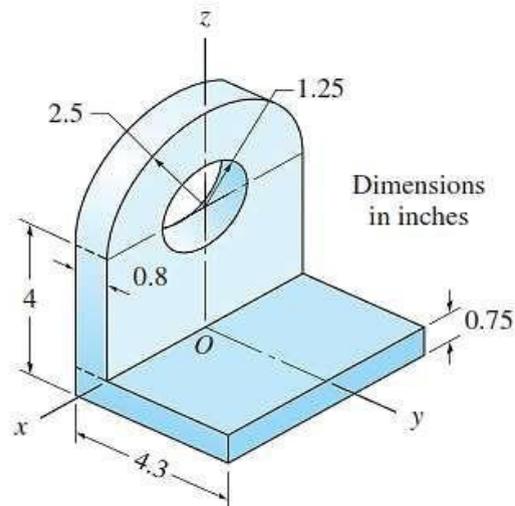
1. Localice el centroide del área de sección transversal de la viga compuesta construida a partir de una canaleta y una viga de patín ancho.



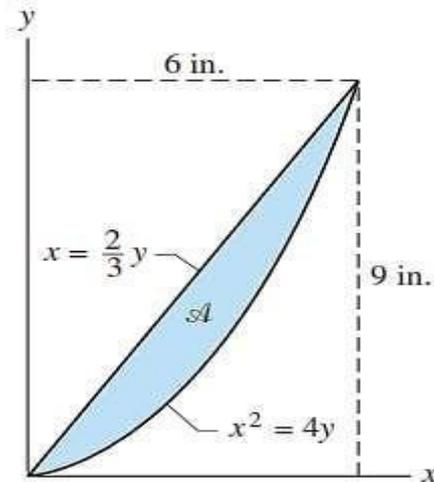
2. El muro de contención a gravedad está hecho de concreto. Determine la ubicación del centro de masa G para el muro.



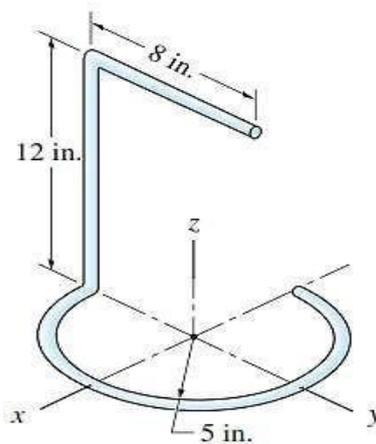
3. Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice las coordenadas del centro de gravedad.



4. Localice el centroide al área sombreada.



5. Localice el centroide del alambre que se dobla en la forma que se muestra.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

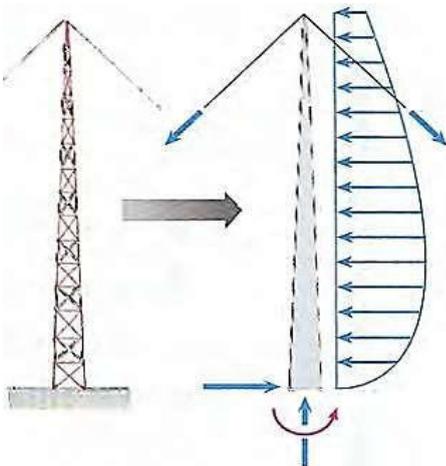
Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

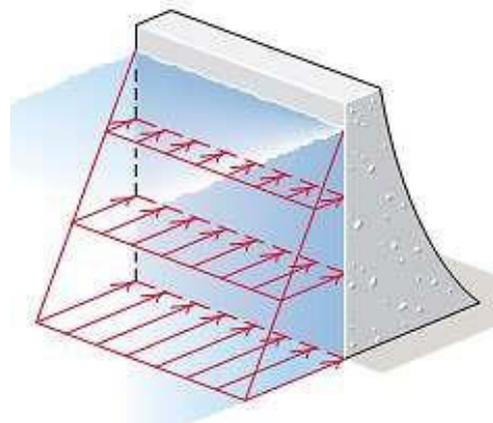
TEMA N° 8: FUERZAS DISTRIBUIDAS



Existen situaciones en las que un cuerpo puede estar sometido a una carga que se encuentra distribuida por toda su superficie. Por ejemplo, la presión del viento sobre la superficie de un señalamiento, la presión del agua dentro de un tanque o en una presa como en la fotografía previa, o el peso de la arena sobre el piso de un contenedor de almacenaje, son todas *cargas distribuidas*. La presión ejercida sobre cada punto de la superficie indica la intensidad de la carga. Ésta se mide por pascales Pa (o N/m^2) en unidades SI o lb/pie^2 en el sistema de uso común en Estados Unidos.



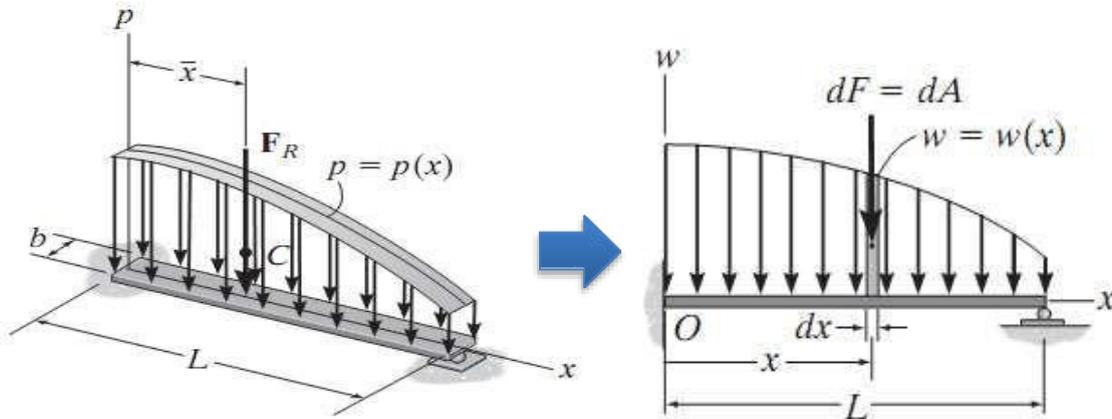
Carga distribuida de viento sobre la torre



Carga distribuida del agua sobre la pared de la presa

9.1 CARGA UNIFORME A LO LARGO DE UN SOLO EJE

Si la viga de la figura es de ancho constante y está sometida a una carga de presión que actúa sólo a lo largo del eje x , esta carga se puede describir como una función $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x)$ en N/m^2 y se puede representar como una **carga distribuida coplanar** y se cumple que: $\mathbf{w}(x) = \mathbf{p}(x) \mathbf{b}$. Este sistema de fuerzas paralelas se puede representar por una fuerza equivalente \mathbf{F}_R que actúa en una ubicación específica sobre la viga.



Magnitud de la carga distribuida

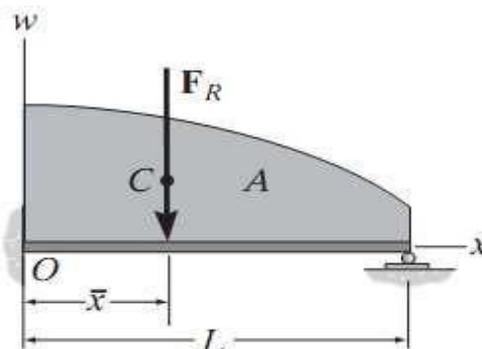
La fuerza resultante que representa la carga distribuida es equivalente al área bajo el diagrama de carga.

$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

Ubicación de la carga distribuida

Esta coordenada en el eje x ubica el centroide C del área bajo la curva:

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

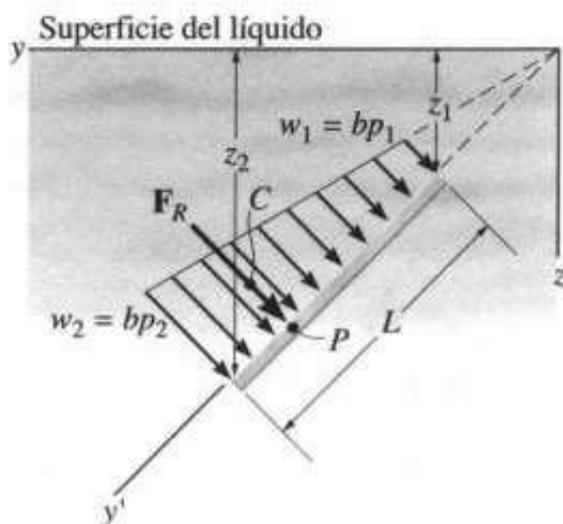
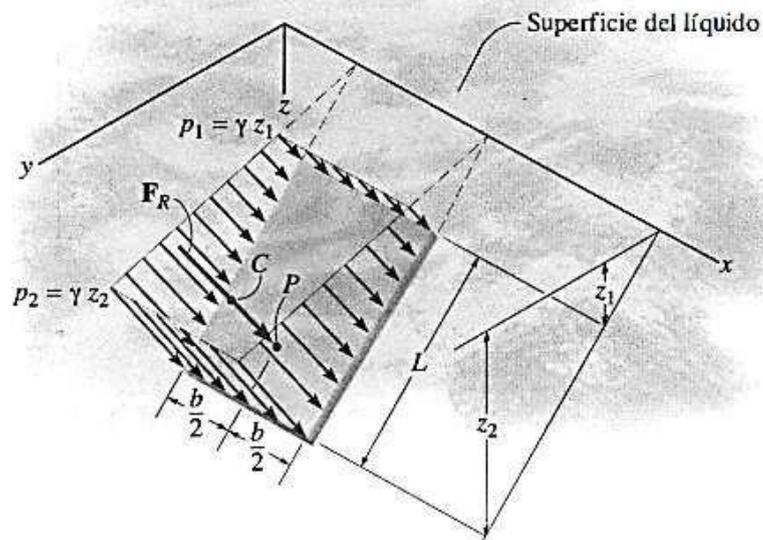


9.2 Fuerzas Sobre Superficies Sumergidas

La presión medida como fuerza por unidad de área depende del peso específico y la profundidad desde la superficie del líquido. La presión actúa en forma perpendicular al área superficial que se localiza en un punto especificado. La fuerza resultante ejercida por efectos de la presión sobre cuerpos sumergidos se puede determinar con un procedimiento similar al de la sección anterior.

Fuerza sobre una placa plana de ancho constante

- ✓ *Magnitud de la fuerza resultante:*
Vista en dos dimensiones es igual al área trapezoidal.
- ✓ *Ubicación de la fuerza resultante*
En la línea de acción que pasa por el centroide C del área, y actúa en un punto P llamado centro de presión.



$$F_R = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)L$$

Donde la carga de presión es:

$$w = bp$$

w = Carga de presión (N/m)

b = Ancho de la placa (m)

P = Presión hidrostática (Pa)

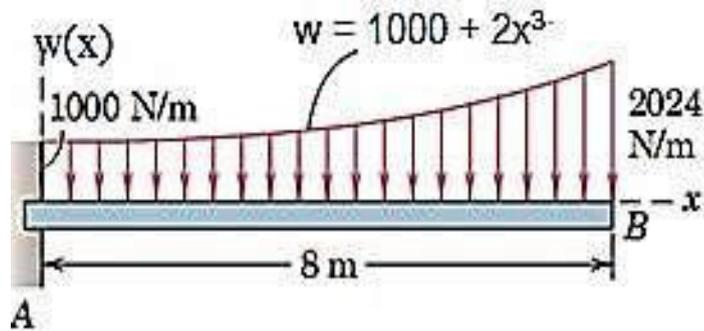
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 8
Tema: Fuerzas Distribuidas

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

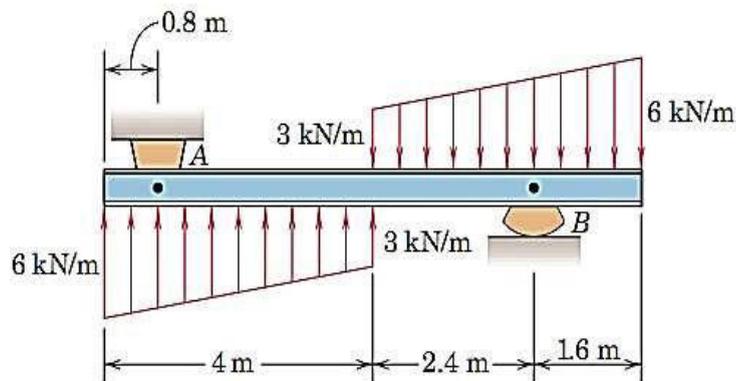
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

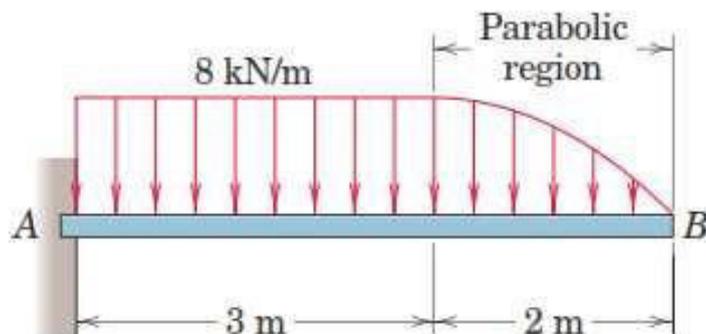
1. La viga está sometida a la carga parabólica mostrada. Determine las reacciones en el empotramiento.



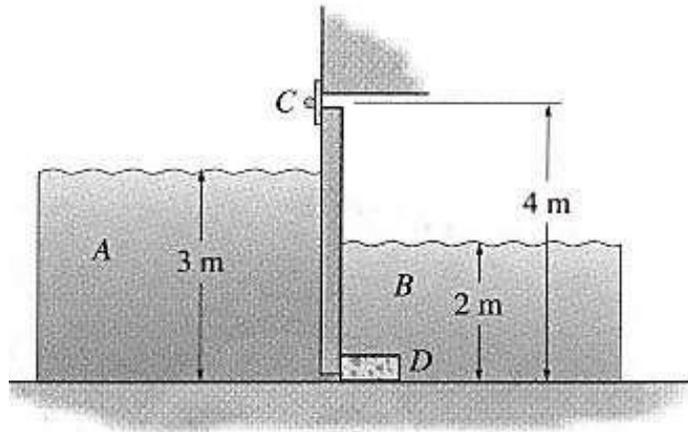
2. Calcular las reacciones de apoyo en A y B para la viga sometida a las dos cargas distribuidas linealmente.



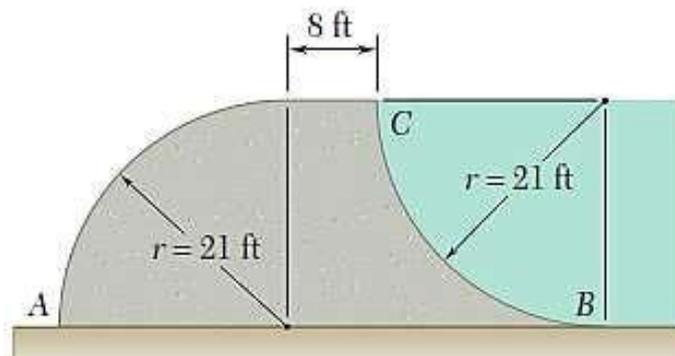
3. Reemplace la carga distribuida mostrada por una sola fuerza resultante y especifique su ubicación medida desde el punto A.



4. Cuando el agua de la marea A desciende, la compuerta de marea gira automáticamente abriéndose para drenar el agua de la ciénaga B. Para la condición de marea alta mostrada, determine las reacciones horizontales desarrolladas en la articulación e y en el tope D. La longitud de la compuerta es de 6 m y su altura de 4 m. $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



5. La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de 1 ft de ancho, determine a) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base AB del dique, b) el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de reacción encontradas en el inciso a) y c) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara BC del dique.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

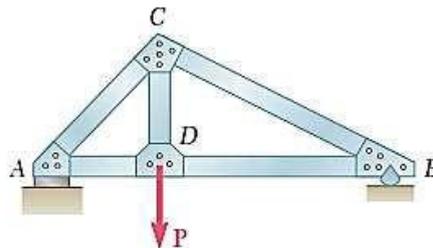
Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 9: ANALISIS ESTRUCTURAL ARMADURAS

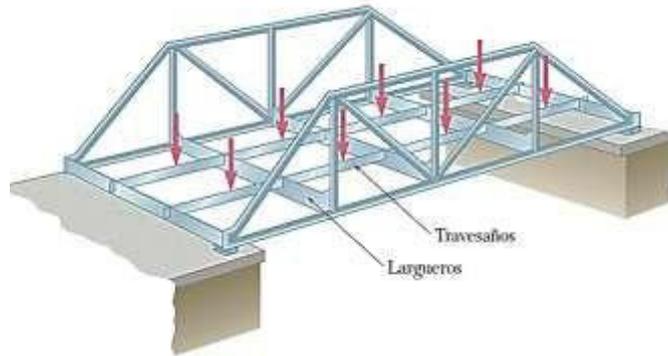


DEFINICIÓN DE ARMADURA

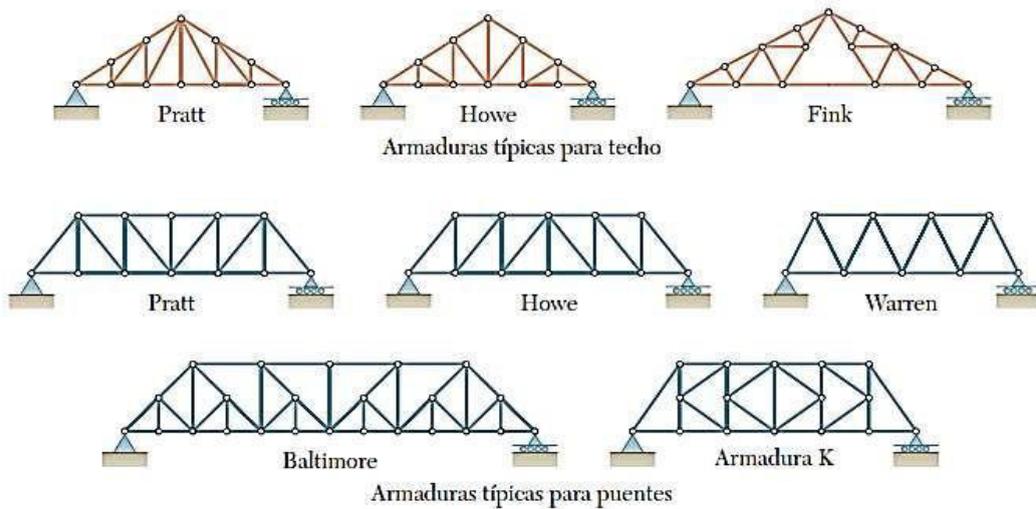
Uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería es la armadura. Ésta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos. Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura no existe un elemento AB , en su lugar existen dos elementos distintos AD y DB . La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.



Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual, mediante el uso de travesaños y largueros, transmite la carga a los nodos. Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos. Cada elemento de una armadura puede considerarse como un elemento a dos fuerzas.



Armaduras típicas



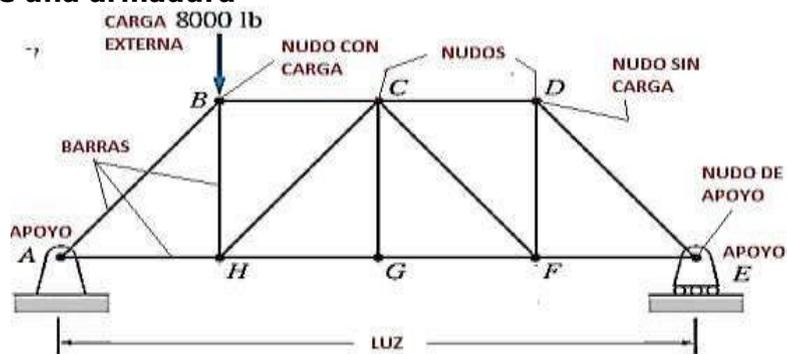
Armaduras simples

Estas armaduras consisten de sistemas formados básicamente de tres barras unidas por pasadores en sus extremos, formando un triángulo, y luego agregando dos nuevas barras por cada nuevo nudo formamos armaduras cada vez más grandes. La experiencia verifica que una configuración triangular es la mejor forma de disponer las barras para soportar cargas sin desplomarse, es decir, se obtiene un sólido rígido estable.

Armadura plana:

Es aquella en la cual las barras y demás elementos de la armadura están contenidos en un mismo plano.

Elementos de una armadura

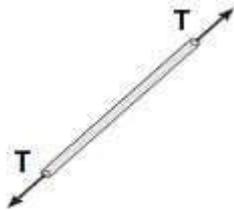


- ✓ Barras o elementos: AB, BC, AH, BH,
- ✓ Nudos o nodos: A, B, C, H,

Fuerzas en una armadura

Los elementos de estas estructuras están sometidos a dos fuerzas iguales y opuestas dirigidas a lo largo del elemento, **fuerzas axiales**: Estas pueden ser tracción o compresión.

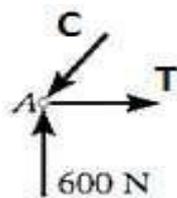
ELEMENTO A TENSIÓN O TRACCIÓN



ELEMENTO A COMPRESIÓN



Si graficamos las fuerzas en un nudo:

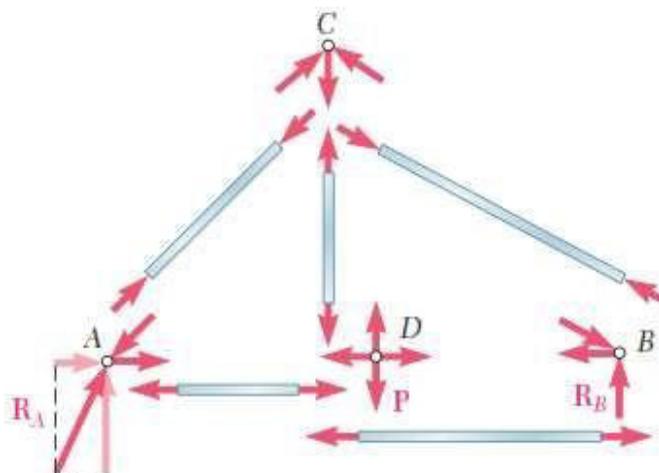


C = Compresión (Entrante)

T = Tensión (Saliente)

ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL METODO DE NUDOS:

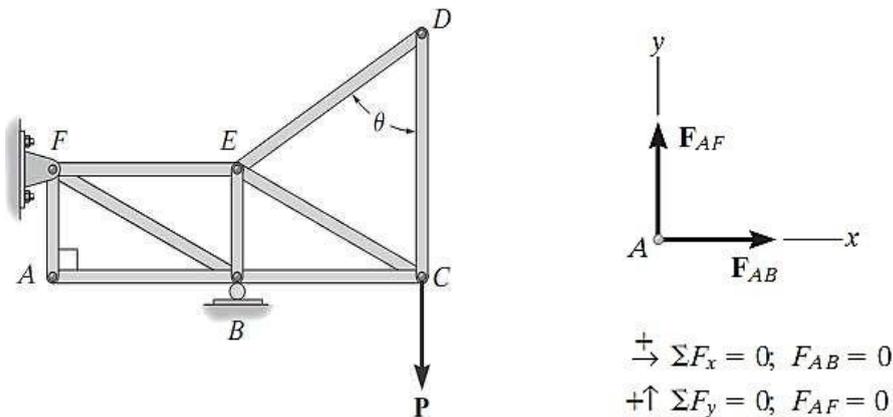
- a) Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa,
- b) Se escoge un nudo donde no existan más de dos fuerzas desconocidas, se grafica el DCL y se aplican las condiciones de equilibrio de fuerzas: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$.
- c) Se escoge otro nudo verificando las condiciones del paso anterior y aplicando las condiciones de equilibrio; así se continúa sucesivamente hasta determinar las fuerzas en todas las barras.



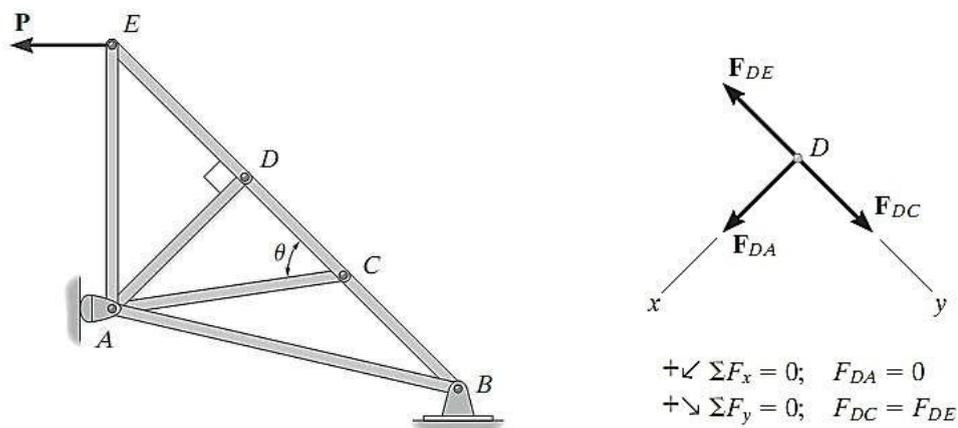
Miembros de fuerza cero

El análisis de armaduras podría simplificarse en algunos casos si se identifica qué miembros no soportan carga. Esos miembros de fuerza cero se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y para proporcionar soporte si la carga aplicada se modifica. Normalmente se pueden identificar estos elementos por simple inspección.

1. Nudo sin carga formado por dos elementos no colineales.



2. Nudo sin carga formado por tres elementos, dos de ellos colineales.



ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SECCIONES:

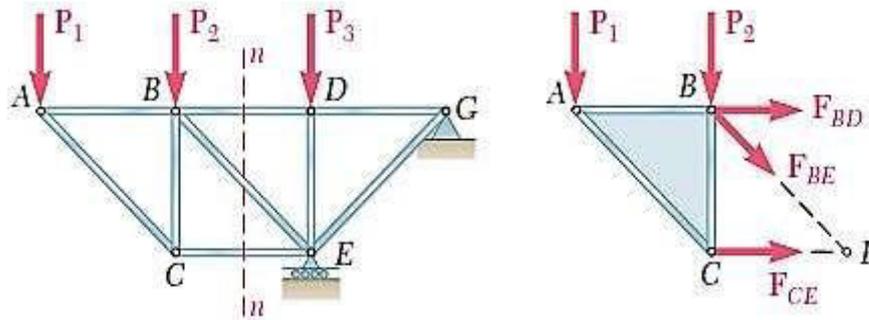
Cuando se quiere determinar las fuerzas en sólo algunos elementos de la armadura se procede más rápido con el método de las secciones.

- a) Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa.
- b) Se dibuja una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas pero que no interseque a más de tres elementos. Cualquiera de las dos secciones de la armadura que obtenga después de que los elementos intersecados han sido "removidos" puede usarse como cuerpo libre.

MECÁNICA

- c) En la sección elegida se deben graficar las fuerzas externas, reacciones en apoyos si los hubiera y las fuerzas internas en las barras cortadas.
- d) Se aplican las condiciones del equilibrio a la sección elegida: ($\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$) determinando así las fuerzas en las barras que se desean analizar.

En ocasiones se requieren hacer varios cortes para obtener resultados esperados.



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 9

Tema: Análisis Estructural – Armaduras

Sección :

Docente : Escribir el nombre del docente

Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

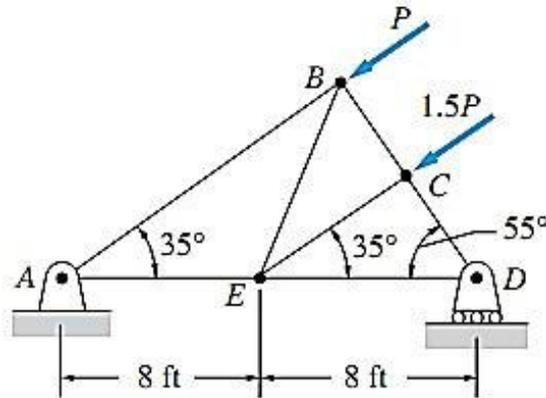
Apellidos :

Nombres :

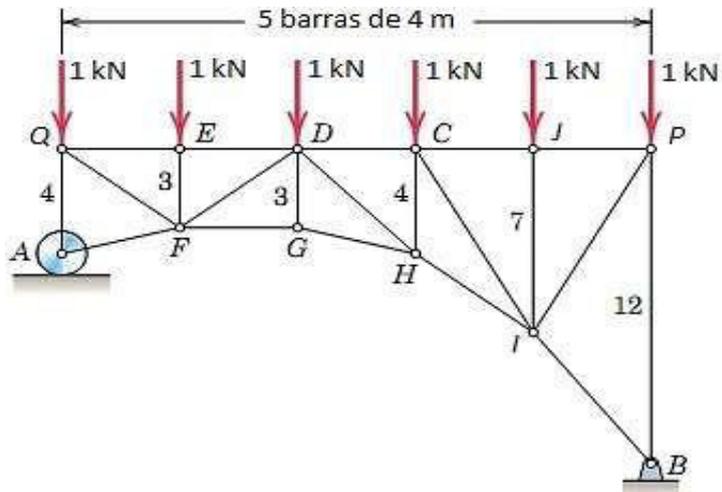
Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

- Determine en cada caso las fuerzas en cada elemento de las armaduras mostradas: (Considere recto el ángulo ABD en la primera armadura)

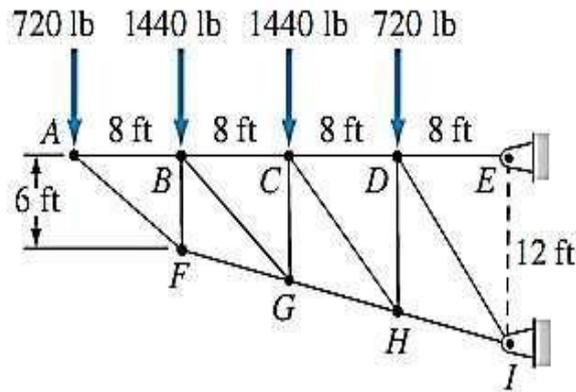


- Despreciando los pesos de los elementos de la armadura, cuyas dimensiones están en metros, apoyada en un pasador en A y en un rodillo en G. Determine la magnitud de la fuerza en el elemento DH y PI.

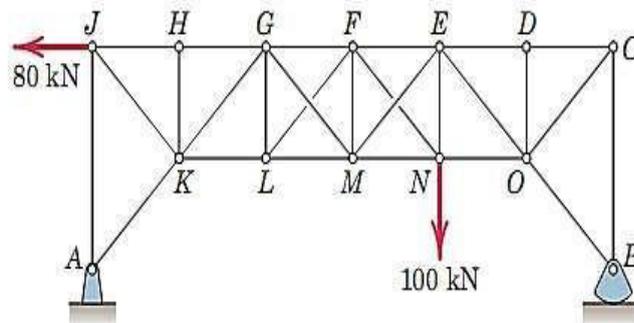


- Despreciando los pesos de los elementos, determine, indicando si existe tensión o compresión las fuerzas axiales en los elementos GH, y CD.

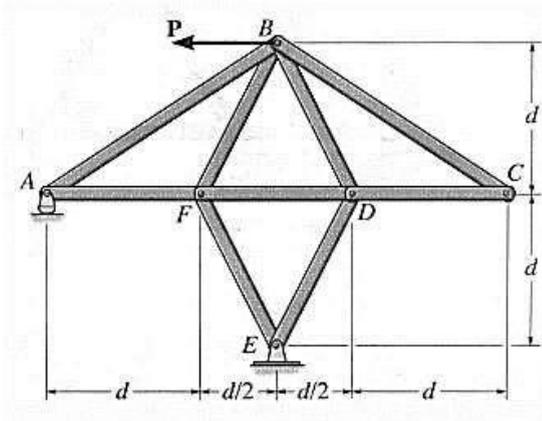




4. La armadura representada por triángulos rectángulos isósceles. Los miembros que se cruzan en los dos tramos del centro son varillas delgadas que no pueden trabajar a compresión. Conservar las dos varillas que trabajan a tensión y calcular sus valores. Determine además la fuerza en el miembro MN.



5. Si la fuerza máxima que cualquier miembro puede soportar es de 4 kN en tensión y 3 kN en compresión, determine la fuerza máxima P que puede ser soportada en el punto B. Considere $d = 1\text{ m}$.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA Nº 10: FRICCIÓN



10.1 Características de la fricción.

Fricción, es la fuerza que resiste el movimiento de dos superficies en contacto que deslizan una sobre otra.

Actúan tangente a la superficie en los puntos de contacto de los dos cuerpos.

Se opone al movimiento o posible movimiento relativo a los puntos de contacto.

Existen dos tipos de *fricción – lubricada y seca o de Coulomb* (fue el primero que las estudió en 1781).

La fricción lubricada existe cuando la superficie de contacto está separada por una película de fluido (gas o líquido). Depende de la velocidad del fluido y de su capacidad para resistir fuerzas de corte o cizalla. λ

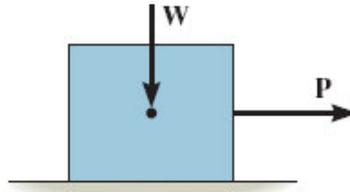
La fricción de Coulomb ocurre entre las superficies de contacto entre los cuerpos en usencia de un fluido lubricante.



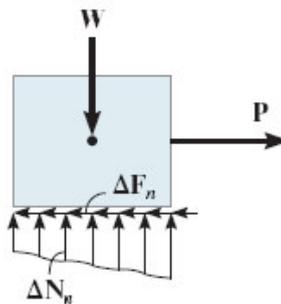
10.2. Fricción Seca

Considere el efecto causado al tirar horizontalmente de un bloque de peso uniforme W que descansa sobre una superficie rugosa

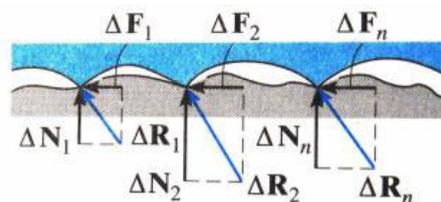
Consideremos que las superficies de contacto son no rígidas, esto es deformable, siendo el resto del bloque rígido.



La fuerza normal ΔN_n y la de fricción ΔF_n actúan a lo largo de la superficie de contacto. En el equilibrio, las fuerzas normales actúan hacia arriba para balancear el peso del bloque W ; las fuerzas de fricción actúan hacia la izquierda para oponerse al movimiento del bloque por la fuerza P .



Existen muchas irregularidades microscópicas entre las dos superficies bloque-suelo. Las reacciones que se producen en cada protuberancia las denotamos por ΔR_n . Cada reacción se puede descomponer en una componente de fricción ΔF_n y una normal ΔN_n .

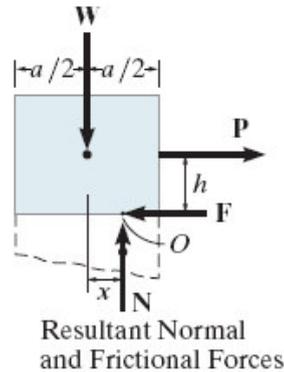


Equilibrio

El efecto total de las fuerzas de fricción y normales se indican por sus resultantes N y F .

La distribución de ΔF_n indica que F es tangente a la superficie de contacto y opuesta en la dirección de P .

La fuerza normal N se determina de la distribución de las ΔN_n .



N esta dirigida hacia arriba, para equilibrar el peso **W**.
N actúa a cierta distancia x a la derecha de la línea de acción de **W**

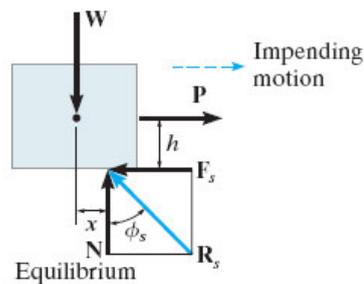
Esta localización es el centroide o el centro geométrico del diagrama de cargas, de manera que aplicada en ese punto, equilibra el efecto de “inclinación o volcado” causado por **P**.

Movimiento inminente

Cuando **P** se incrementa lentamente, **F** aumenta de manera similar hasta que toma un valor máximo F_s , llamado el límite de fuerza estática de fricción.

Este límite de fricción estática F_s es directamente proporcional a la fuerza resultante normal N .

$$F_s = \mu_s N$$



La constante de proporcionalidad μ_s se conoce como el **coeficiente de fricción estática**.

El ángulo ϕ_s que F_s forma con **N** se llama ángulo de fricción estática.

$$\phi_s = \arctan\left(\frac{F_s}{N}\right) = \arctan\left(\frac{\mu_s N}{N}\right) = \arctan(\mu_s)$$

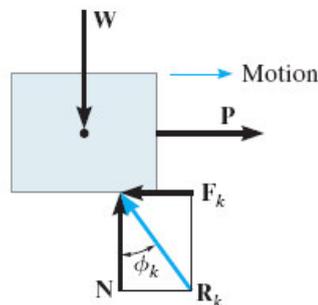
Valores típicos de μ_s

Materiales en contacto	Coefficiente de fricción estát μ_s
Metal sobre hielo	0.03 – 0.05
Madera sobre madera	0.30 – 0.70
Cuero sobre madera	0.20 – 0.50
Cuero sobre sobre metal	0.30 – 0.60
Aluminio sobre aluminio	1.10 – 1.70

Movimiento

Cuando P es mayor que F_s , la fuerza de fricción toma un valor que es ligeramente menor que F_s , llamada *fuerza de fricción cinética*.

El bloque no se mantendrá en equilibrio ($P > F_s$) sino que deslizará acelerándose.



La caída de F_s (estática) a F_k (cinética) se puede explicar examinando las superficies de contacto.

Cuando $P > F_s$, P tiene la capacidad de suavizar o “cortar” las protuberancias.

La fuerza resultante F_k es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal resultante.

$$N, F_k = \mu_k N.$$

La constante de proporcionalidad μ_k es el coeficiente de fricción cinética.

μ_k es típicamente 25% más pequeño que μ_s

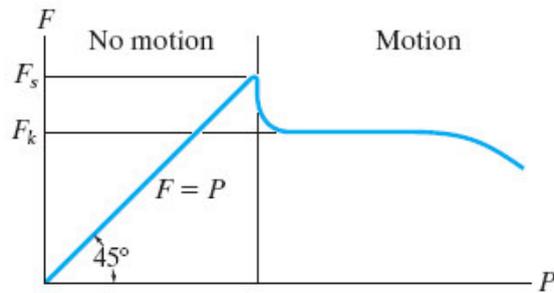
La resultante R_k tiene una línea de acción definida por Φ_k , (el ángulo de fricción cinética)

$$\Phi_k = \arctan\left(\frac{F_k}{N}\right) = \arctan\left(\frac{\mu_k N}{N}\right) = \arctan(\mu_k)$$

F es la fuerza de fricción *estática* si se mantiene el equilibrio.

F es la fuerza *límite de fricción estática* cuando alcanza el valor máximo necesario en el que se puede mantener el equilibrio F_s .

F se llama de fricción *cinética* cuando ocurre deslizamiento entre las superficies en contacto.

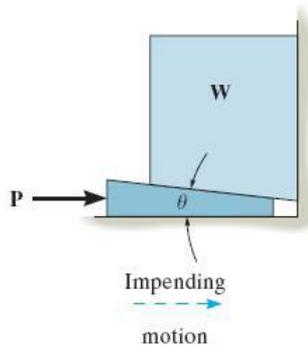


10.3. Cuñas

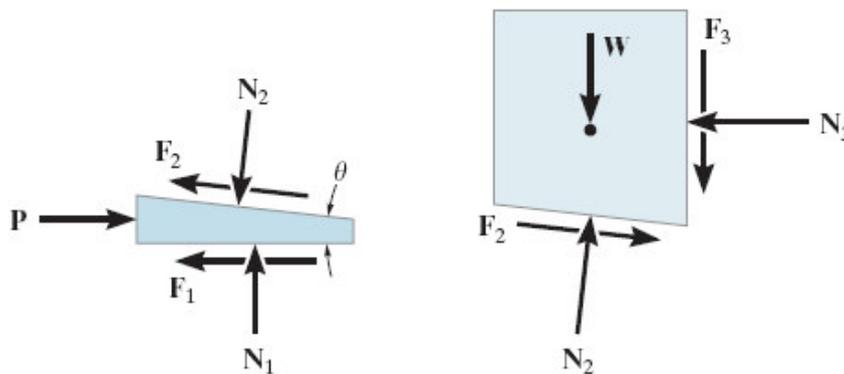
Una cuña es una maquina simple que se usa para transformar una fuerza aplicada en otra mucho mas grande, dirigida aproximadamente a 90 grados de la fuerza aplicada.

Tambien se usan las cuñas para dar un pequeño desplazamiento o para ajustar una carga pesada.

Ejemplo una cuña para levantar un bloque de peso W aplicando una fuerza P a la cuña



DCL de la cuña y el bloque:



Excluimos el peso de la cuña porque es pequeño comparado con el del bloque.

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 10

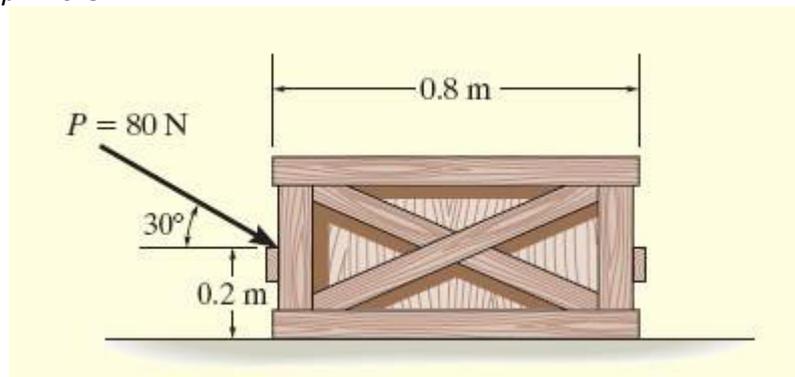
Tema: FRICCIÓN

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

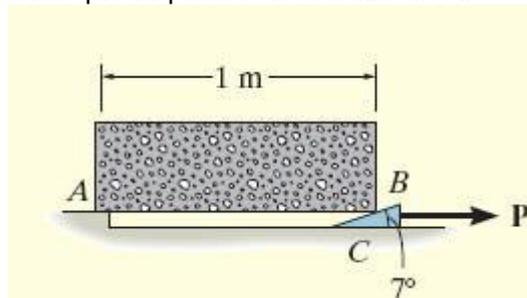
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha : .../.../.....
 Duración : Indicar el tiempo

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio en grupo de 5 integrantes considerando su diagrama y proceso. Evite borrones. El orden influirá en su calificación.

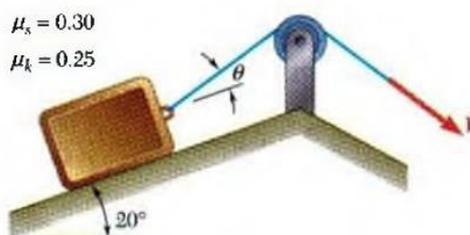
- El contenedor tiene una masa uniforme de 20 kg. Si una fuerza $P = 80 \text{ N}$ se aplica al mismo, determine si permanece en equilibrio. El coeficiente de fricción estática es $\mu = 0.3$.



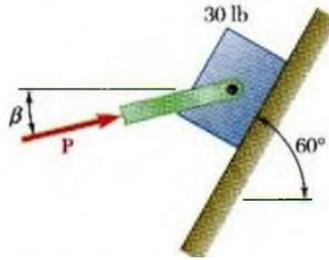
- El bloque de piedra uniforme tiene una masa de 500kg y se mantiene en posición horizontal mediante un cuna en B. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, en las superficies de contacto, determine la fuerza mínima P necesaria para retirar la cuna. Asumir que la piedra no desliza en A.



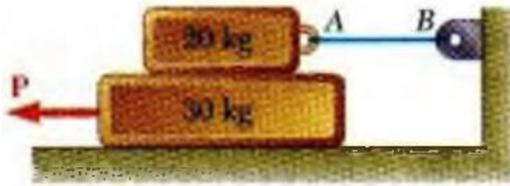
- Determine si el bloque de 10 kg mostrado en la figura está en equilibrio, y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $P = 40 \text{ N}$ y $\theta = 20^\circ$.



4. Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 30 lb y el plano inclinado que se muestran en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine a) el valor mínimo de P necesario para mantener al bloque en equilibrio, b) el valor correspondiente de β .



5. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza P requerida para que el bloque de 30 kg comience a moverse si el cable AB , a) se une como indica la figura, b) se retira.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 11: MOMENTO DE INERCIA



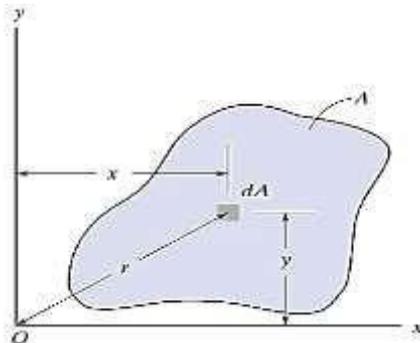
La cantidad denominada momento de inercia aparece con frecuencia en los análisis de problemas de ingeniería. Por ejemplo, los momentos de inercia de áreas se utilizan en el estudio de fuerzas distribuidas y en el cálculo de deflexiones de vigas. El momento ejercido por la presión sobre una placa plana sumergida se puede expresar en términos del momento de inercia del área de la placa. En dinámica, los momentos de inercia de masa se usan para calcular los movimientos rotatorios de objetos. Para estudiar estas aplicaciones, los momentos de inercia deben ser parte de nuestro "vocabulario" técnico. En este tema mostraremos cómo calcular los momentos de inercia de áreas simples o de cuerpos y luego usaremos resultados llamados teoremas de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia de áreas o cuerpos más complejos.

Para el caso de vigas con cargas laterales éstas hacen que la viga se flexione; por tanto, la viga debe ser resistente a la flexión para soportar cargas. La resistencia a la flexión depende directamente del momento de inercia del área de su sección transversal. A mayor momento de inercia la viga aumenta su resistencia. En condiciones reales, la forma de las secciones transversales de las vigas, como los pasos a desnivel carreteros, o de vías férreas, o de marcos de edificios están configurados para tener grandes momentos de inercia.

Momentos de Inercia de un área

La propiedad del área de una sección transversal que determina la resistencia a la flexión respecto a un eje particular de una viga se denomina *momento de inercia del área*.

Respecto a la figura se define:



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

I_x = Momento de inercia del área A respecto al eje x.

I_y = Momento de inercia del área A respecto al eje y.

Tener presente que los momentos de inercia son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son m^4 (SI), pie^4 (sistema inglés).

Momento de inercia polar:

Además de los momentos de inercia respecto a los ejes anteriores, muy importante para rotación de placas se define respecto al polo O o eje z, donde r es la distancia perpendicular desde el polo hasta el elemento dA:

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Se verifica, dado que:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Radio de giro de un área:

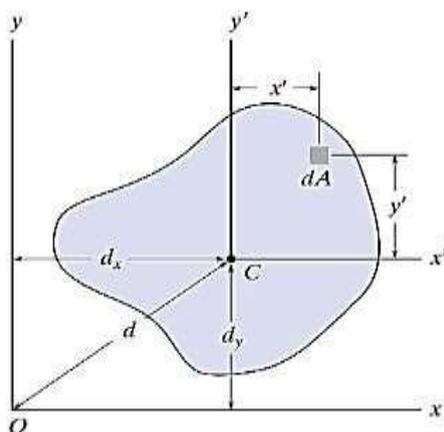
El radio de giro de un área respecto a un eje tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas, se determinan así:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad k_z = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

Los radios de giro son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son m (SI), pie (sistema inglés).

Teorema de los ejes paralelos para un área:

También llamado Teorema de Steiner. El *teorema de los ejes paralelos* puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a *cualquier eje* que sea paralelo a un eje que pasa a través de su centroide y del cual se conozca el momento de inercia.



$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

Donde:

$$\bar{I}_{x'}, \quad \bar{I}_{y'}$$

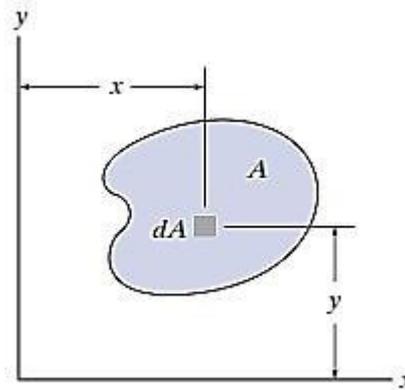
son los momentos de inercia del área A respecto a los ejes centroidales.

"El momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través del centroide del área, más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes".

Producto de inercia:

La propiedad de un área, llamada el producto de inercia, es necesaria a fin de determinar los momentos de inercia *máximo* y *mínimo* para el área. Estos valores máximo y mínimo son propiedades importantes necesarias para diseñar elementos estructurales y mecánicos como vigas, columnas y flechas.

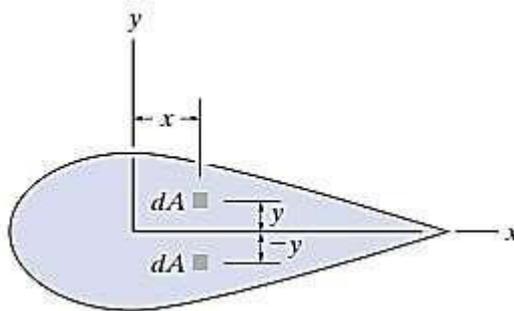
El *producto de inercia* del área de la figura siguiente con respecto a los ejes x y y se define como:



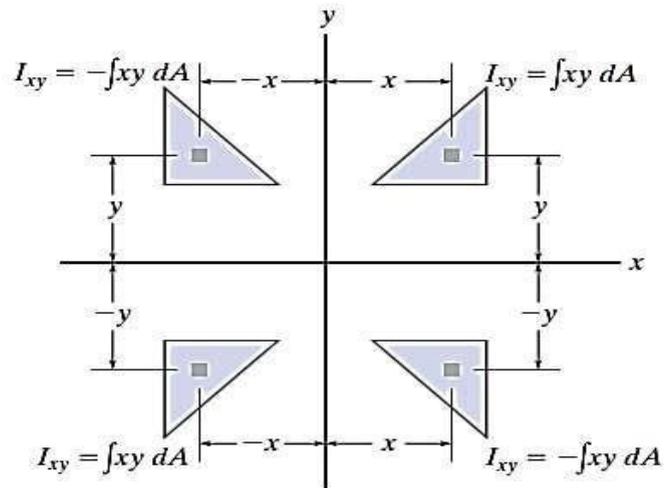
$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

- ✓ El producto de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia, por ejemplo, m^4 , mm^4 o $pies^4$, $pulg^4$. Sin embargo, como x o y pueden ser cantidades negativas.
- ✓ El producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la ubicación y orientación de los ejes coordenados.

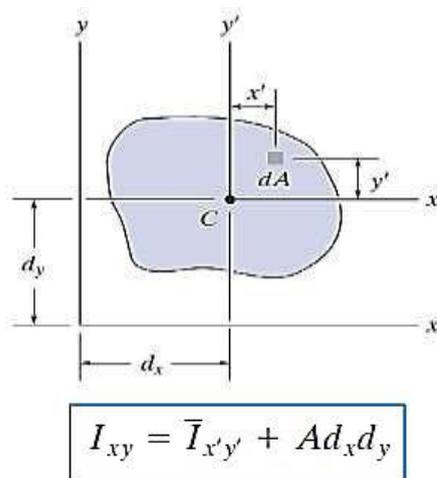
Por ejemplo, el producto de inercia I_{xy} para área será *cero* si el eje x , o el eje y , es un eje de *simetría* para el área, como en la figura mostrada a continuación. Aquí, cada elemento dA localizado en el punto (x, y) tiene un elemento dA correspondiente en $(x, -y)$. Como los productos de inercia para esos elementos son, respectivamente, $xy \, dA$ y $-xy \, dA$, la suma algebraica o integración de todos los elementos que se elijan de esta manera se cancelarán uno a uno. En consecuencia, el producto de inercia para el área total se convierte en cero.



De la definición también se infiere que el "signo" de esta cantidad depende del cuadrante donde se ubique el área. Como en el gráfico siguiente se muestra el, si el área se gira de un cuadrante a otro, el signo de I_{xy} cambiará.



Finalmente, a continuación, se tiene una expresión del *Teorema de los ejes paralelos aplicado al producto de inercia de un área*:



Tener cuidado, puesto que los *signos algebraicos* para dx y dy se mantengan al aplicar esta ecuación.

Momentos de Inercia de áreas compuestas:

Procedimiento:

1º Partes simples componentes.

- ✓ Con un croquis, divida el área en sus partes componentes, formas conocidas, e indique la distancia perpendicular desde el centroide de cada parte hasta el eje de referencia.

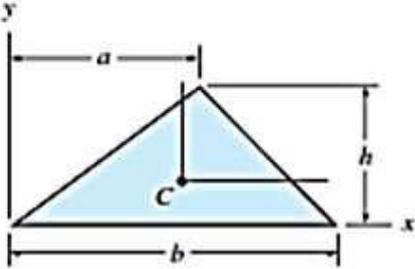
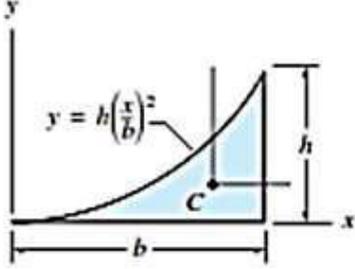
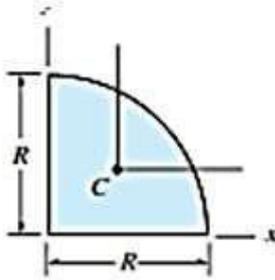
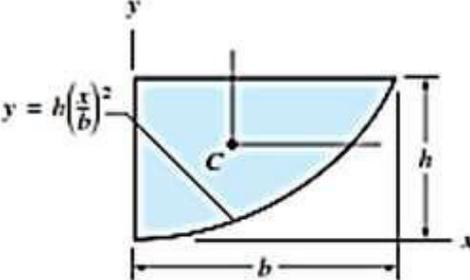
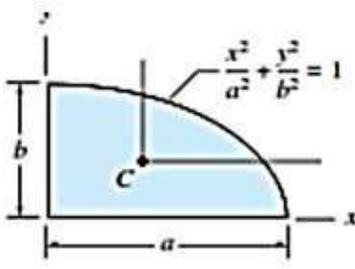
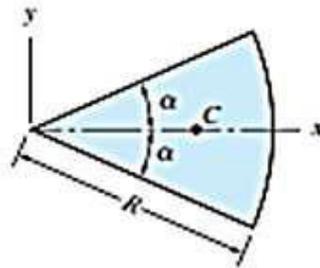
2º Teorema de los ejes paralelos.

- ✓ Si el eje centroidal para cada forma conocida no coincide con el eje de referencia, deberá usarse el teorema de los ejes paralelos, para determinar el momento de inercia de la parte con respecto al eje de referencia. Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje centroidal use tablas de fórmulas para regiones conocidas.

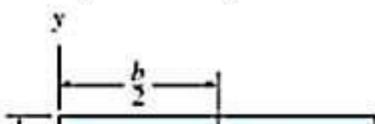
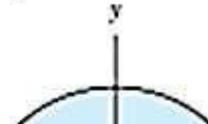
3º Suma.

- ✓ El momento de inercia de toda el área con respecto al eje solicitado se determina por la suma de los resultados de sus partes componentes con respecto a este eje.
- ✓ Si una parte componente tiene un "agujero", su momento de inercia se encuentra al "restar" el momento de inercia del agujero de la suma de momentos de inercia de las demás partes componentes que si conforman el área inicial.

Propiedades de las figuras planas

<p>1. Triángulo</p>  $I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2) \quad I_y = \frac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$ $I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(2a - b) \quad I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(2a + b)$	<p>2. Enjuta parabólica</p>  $I_x = \frac{37bh^3}{2100} \quad I_x = \frac{bh^3}{21}$ $I_y = \frac{b^3h}{80} \quad I_y = \frac{b^3h}{5}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{120} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$
<p>3. Cuarto de círculo</p>  $I_x = I_y = 0.05488R^4 \quad I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$ $I_{xy} = -0.01647R^4 \quad I_{xy} = \frac{R^4}{8}$	<p>4. Región semiparabólica</p>  $I_x = \frac{8bh^3}{175} \quad I_x = \frac{2bh^3}{7}$ $I_y = \frac{19b^3h}{480} \quad I_y = \frac{2b^3h}{15}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{60} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$
<p>5. Cuarto de elipse</p>  $I_x = 0.05488ab^3 \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$ $I_y = 0.05488a^3b \quad I_y = \frac{\pi a^3b}{16}$ $I_{xy} = -0.01647a^2b^2 \quad I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$	<p>6. Sector circular</p>  $I_x = \frac{R^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$ $I_y = \frac{R^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha)$ $I_{xy} = 0$

Propiedades de las figuras planas (Continuación)

<p>7. Región rectangular</p> 	<p>8. Región circular</p> 
--	--

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 11

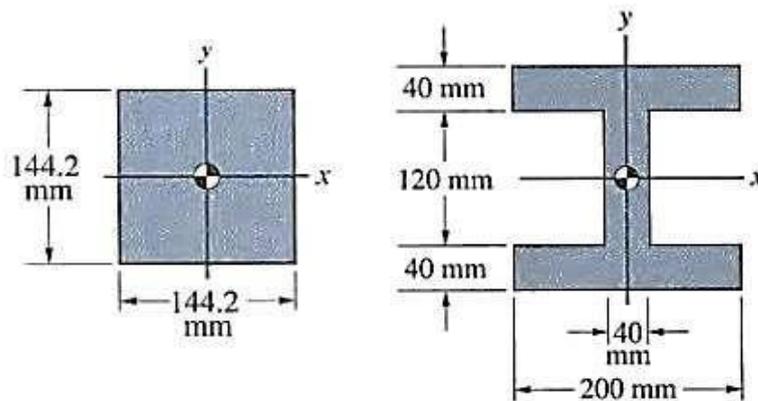
Tema: Momento de Inercia

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

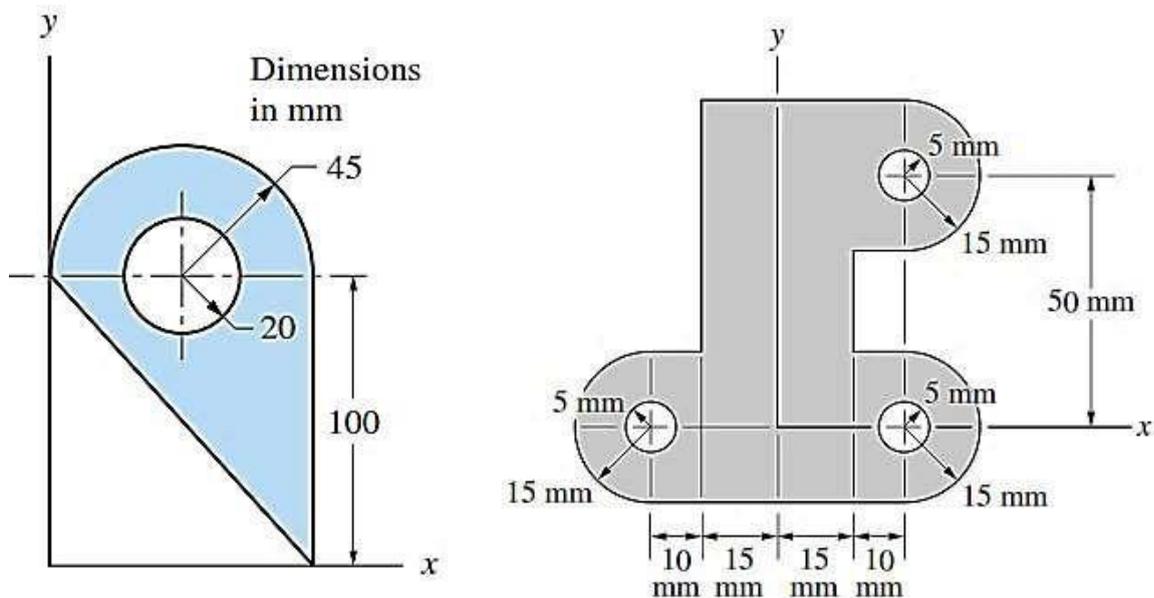
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

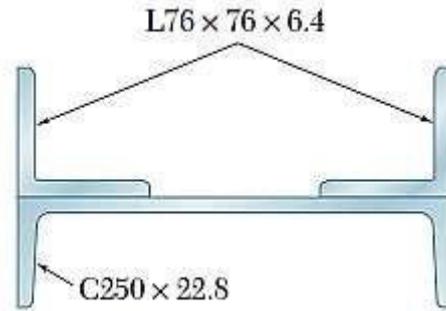
1. Para las secciones transversales de las vigas mostradas. ¿Cuál tiene mayor momento de inercia respecto al eje x ?



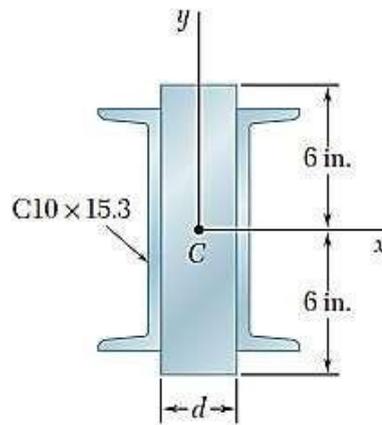
2. En cada caso, para el área sombreada determine el momento de inercia con respecto al eje x y al eje y , además el radio de giro para cada eje.



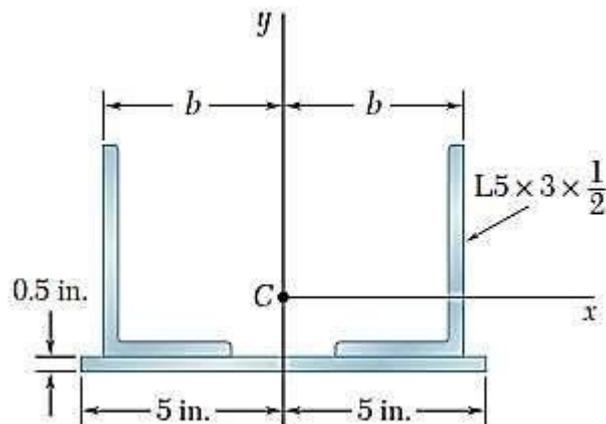
3. Como se muestra en la figura, dos ángulos de L76 x76 x 6.4 mm se sueldan a un canal C250 x 22.8. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al alma del canal, respectivamente.



4. Dos canales se sueldan a una placa de acero de $d \times 12$ in., como se muestra en la figura. Determine el ancho d para el cual la relación de los momentos de inercia de los momentos de inercia centroidales de la sección es 16.



5. Dos ángulos de $L5 \times 3 \times 0.5$ in. se sueldan a una placa de acero de 0.5 in. Determine la distancia b y los momentos centroidales de inercia I_x e I_y de la sección combinada si se sabe que $I_y = 4 I_x$.



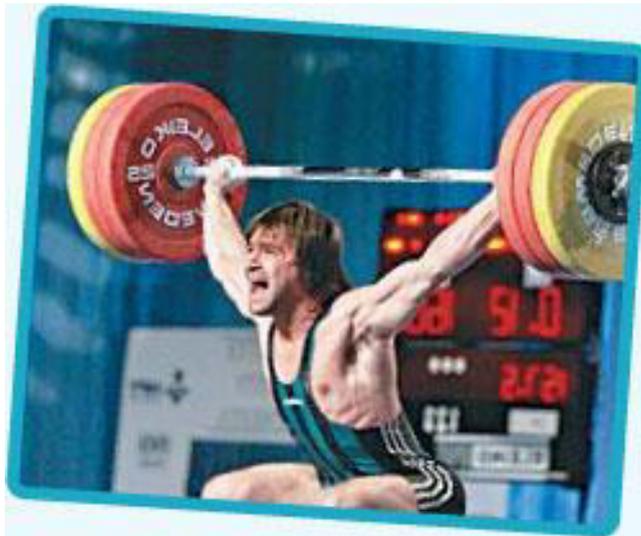
Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

TEMA N° 12: TRABAJO VIRTUAL



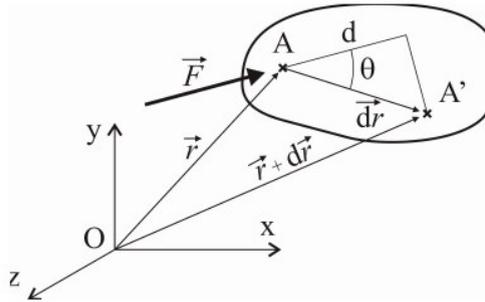
El Principio de Trabajos Virtuales (P.T.V.) fue utilizado por Galileo (1564-1642) para el diseño y cálculo de mecanismos y desarrollado teóricamente con un enunciado más matemático y formal por Lagrange (1736-1813), ya que desarrolla la teoría variacional y escribe su “Mecánica Analítica” donde coloca las bases de dicha disciplina. No obstante a lo anterior el núcleo teórico del P.T.V. fue enunciado por Santiago Bernouilli (1654-1705) y por Daniel Bernouilli (1700-1782): “Si una estructura, estando en equilibrio, sufre una deformación virtual debido a la acción de una carga adicional, el trabajo virtual externo de la carga en cuestión, es igual al trabajo virtual interno, desarrollado por las tensiones causadas por la carga”. En cuanto a lo que concierne a la mecánica de cuerpos rígidos, dado que por definición estos cuerpos no sufren deformación sino desplazamientos, el P.T.V. debe ser reformulado. El mismo fue enunciado por Johann Bernouilli en el año 1717 de la siguiente manera: “Dado un cuerpo rígido mantenido en equilibrio por un sistema de fuerzas, el trabajo virtual efectuado por este sistema, durante un desplazamiento virtual, es nulo”. Por tal motivo algunos autores prefieren llamar la P.T.V como Principio de los Desplazamientos Virtuales (P.D.V.), sin embargo en el presente texto se conservará a la denominación original.

Trabajo

Para empezar definiremos algunos conceptos que sirvan de base al Principio de Trabajos Virtuales.

Trabajo de una Fuerza.

Consideremos una partícula A, mostrada en la figura, que sufre un desplazamiento $d\vec{r}$ debido a la aplicación de una fuerza \vec{F} . La partícula material A, cuyo vector posición inicial es \vec{r} , pasa a ocupar la posición A' definida por el vector $\vec{r} + d\vec{r}$. El trabajo de la fuerza \vec{F} correspondiente al desplazamiento $d\vec{r}$ se define como:



$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

La unidad del trabajo en el SI es el julio (J).

El producto escalar entre los vectores fuerza y desplazamiento se puede calcular de dos formas:

$$dU = Fd\cos\theta$$

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Trabajo total en el recorrido de 1 a 2, sería:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{1 \rightarrow 2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Trabajo en un sólido rígido

El trabajo de las fuerzas interiores en un sólido rígido es cero, ya que las fuerzas interiores se cancelan dos a dos. Sólo hay que considerar el trabajo debido a las fuerzas exteriores.

$$dU = \sum \vec{F}_{ext_i} \cdot d\vec{r}_i$$

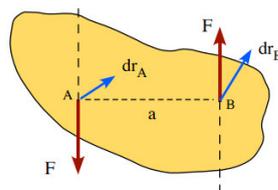
Siendo i el punto donde está aplicada la \vec{F}_{ext_i} y $d\vec{r}_i$ el desplazamiento de ese punto.

A partir de ahora elimino el subíndice exteriores: siempre me estaré refiriendo a ellas cuando consideremos sólidos rígidos

Trabajo de un par de fuerzas (cupla de fuerzas)

Sean fuerzas F y $-F$ con líneas de acción separadas una distancia a . Equivalen a un momento de módulo $M=aF$ y sentido antihorario en este caso. El trabajo elemental de ese par de fuerzas:

$$dU_M = -\vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \vec{F} \cdot d\vec{r}_B$$

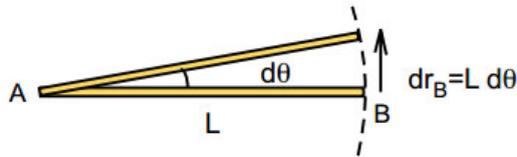


Esos desplazamientos en un sólido rígido han de ser tales que conserven las distancias.
Hay dos posibilidades básicas:

Que todos los puntos se muevan igual (traslación)



Que uno permanezca fijo y los demás giren en torno a él describiendo arcos de circunferencia con centro en dicho punto (rotación)

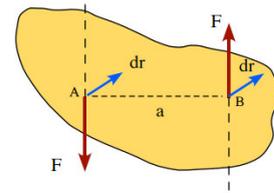


Cualquier otro movimiento es combinación de ambos.

Trabajo del par de fuerzas en una traslación:

$$\vec{dr}_A = \vec{dr}_B = \vec{dr}$$

$$dU_M = -\vec{F} \cdot \vec{dr} + \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$$

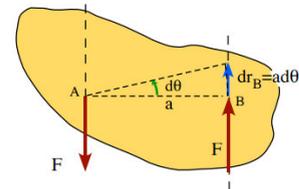


Trabajo del par de fuerzas en una rotación, con centro en A:

$$dr_B = a d\theta$$

$$dr_B = a d\theta, \text{ tangente a la trayectoria}$$

$$dU_M = \vec{F} \cdot \vec{dr}_B = F \cdot a \cdot d\theta = M d\theta$$

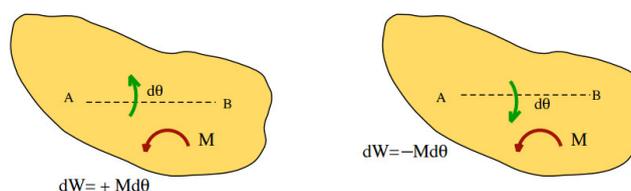


Si la rotación y el momento tienen el mismo sentido, como en este caso, el trabajo es positivo. Si son opuestos, el trabajo es negativo.

Por lo que el trabajo de un par de fuerzas, sería:

$$dU_M = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

Esta expresión es general para problemas espaciales, en los cuales los pares y los desplazamientos angulares puede ser tres componentes. **En el caso plano** se reduce al simple producto de los módulos con signo + o - según sean del mismo sentido u opuestos:



Trabajo virtual

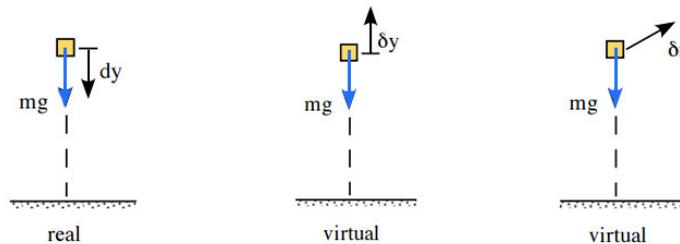
Los trabajos que hemos definido eran realizados en desplazamientos reales, en movimientos que ocurren. Pero también podemos imaginarnos unos desplazamientos hipotéticos, que no tienen por qué ocurrir: a esos desplazamientos se les llama **desplazamientos virtuales**, y al trabajo realizado por las fuerzas en esos desplazamientos ficticios, recibe el nombre de **trabajo virtual**.

Para distinguir desplazamientos reales y virtuales, utilizaremos el símbolo delta (δ) para designar los desplazamientos virtuales y los trabajos virtuales correspondientes.

$$\delta U = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Donde:

$\delta \vec{r}$: desplazamiento virtual.



Principio de los trabajos virtuales

Un sistema de cuerpos rígidos conectados está en equilibrio si y sólo si el trabajo virtual realizado por todas las fuerzas y pares exteriores que actúan sobre el sistema es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual:

En posición de equilibrio:

$$\delta U = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \rightarrow \forall \delta \vec{r}_i$$

Se puede aplicar, dadas las fuerzas, para determinar la posición de equilibrio o a la inversa, para calcular cuanto debe valer alguna fuerza para que haya equilibrio en una posición determinada.

Aunque se puede aplicar para cualquier desplazamiento del sistema, conviene utilizar desplazamientos compatibles con los enlaces para minimizar el número de fuerzas que den trabajo. Hay además que expresarlo sólo en función de las coordenadas independientes

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 12

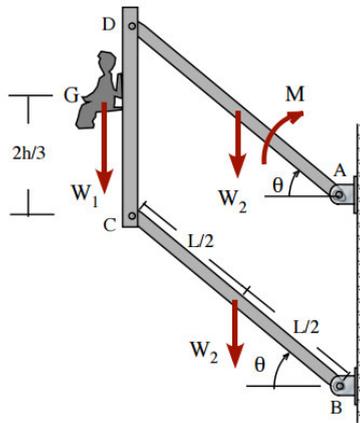
Tema: Trabajo virtual

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

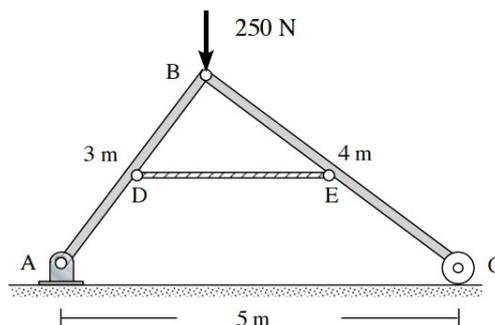
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

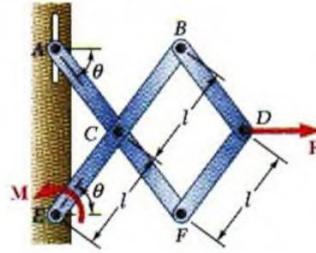
- El sistema de la figura se usa para transportar personas de un nivel a otro, usando un mecanismo que aplica un par M a la barra AD . El peso del viajero, asiento y barra CD es W_1 , actuando en G . Las otras dos barras son idénticas y uniformes, pesando cada una W_2 . Hallar la relación entre M y el ángulo de equilibrio.



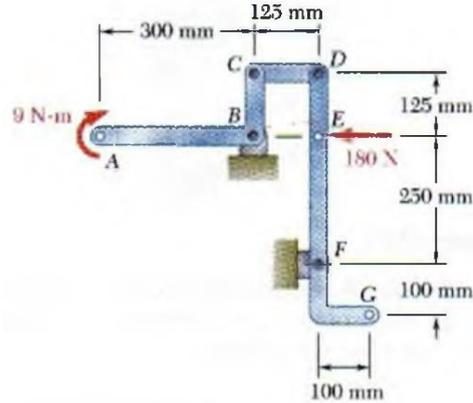
- Las barras articuladas AB y BC tienen longitudes de 3 y 4 m. Un hilo ideal une los puntos medios de ambas barras. La única carga que se considera es la vertical aplicada en B de 250 N. El sistema está en equilibrio en la posición representada. Determinar mediante el método de los trabajos virtuales, la tensión en el cable



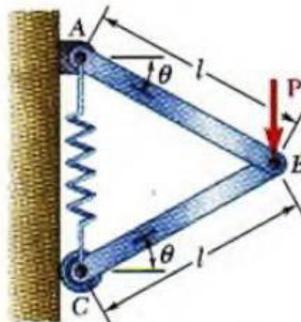
- Con el método de trabajo virtual, determine la magnitud del par M requerido para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura



4. Determine la fuerza vertical P que debe aplicarse en G para mantener el equilibrio del mecanismo que muestra cada figura.



5. Para el mecanismo mostrado en la figura, determine las expresiones para θ y para la tensión en el resorte que corresponden a la posición de equilibrio. El resorte de constante k tiene una longitud sin estirar h . Por esto ignore el peso del mecanismo.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

TERCERA UNIDAD

TEMA N° 13: DINAMICA

Cinemática de partículas



El transbordador espacial se concibió como un método económico para poner en órbita personal y equipo. Durante su desarrollo, los ingenieros usaron principios de dinámica para predecir su movimiento durante el despegue, en órbita y al aterrizar. Estas predicciones fueron esenciales para el diseño de su configuración aerodinámica y estructura, así como de los motores y del sistema de control. La dinámica es una de las ciencias en que se basa el diseño de todos los vehículos y máquinas.

En el diseño de un vehículo, sea éste una motocicleta o una nave espacial, los ingenieros deben ser capaces de diseñar un vehículo, sea éste una bicicleta o una nave espacial, los ingenieros deben ser capaces de analizar y predecir su movimiento. Para diseñar un motor, deben analizar los movimientos predecir su movimiento. Para diseñar un motor, deben analizar los movimientos de cada una de sus partes/móviles.

Aun al diseñar estructuras "estáticas" como edificios, puentes y presas, a menudo deben analizar los movimientos que provocan las eventuales cargas de viento y los sismos. partes/móviles. Aun al diseñar estructuras "estáticas" como edificios, puentes y presas, a menudo deben analizar los movimientos que provocan las eventuales cargas de viento y los sismos.

Comenzamos con el estudio del movimiento sin interesarnos aquí las propiedades de los cuerpos ni las causas de sus movimientos; sólo queremos describir y analizar el movimiento de un punto en el espacio. Sin embargo, tenga presente que una partícula puede representar algún punto (como el centro de masa) de un cuerpo en movimiento. Después de definir la posición, velocidad, y aceleración de un punto, consideramos el ejemplo más sencillo: el movimiento a lo largo de una línea recta. Luego mostramos cómo el movimiento de un punto a lo largo de una **trayectoria** cualquiera se expresa y analiza en varios sistemas coordenados.

Esta parte inicial de la dinámica se denomina cinemática y posteriormente estudiaremos las relaciones entre las fuerzas y la aceleración que producen; es decir, la cinética.

1. Cinemática de una partícula:

Es el estudio de la geometría del movimiento. Sirve para relacionar el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo, sin hacer referencia a la causa del movimiento.

2. Posición, velocidad y aceleración:

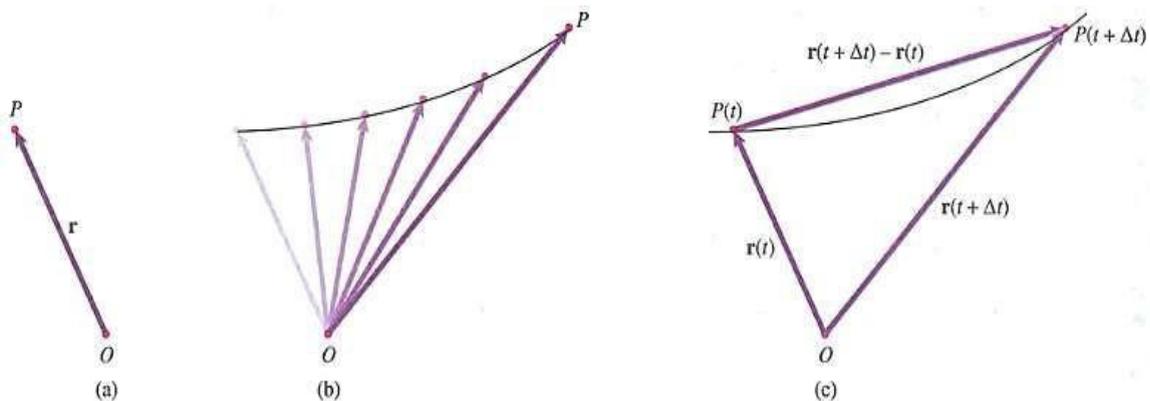
Podemos describir la posición de un punto P escogiendo un de referencia O presentando el vector de posición \mathbf{r} de O a P (Fig. a). Supongamos que P está en movimiento respecto a O , de manera que es una función del tiempo t (Fig. b). Expresamos esto con la notación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

La velocidad de P respecto a O en el tiempo t se define como:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

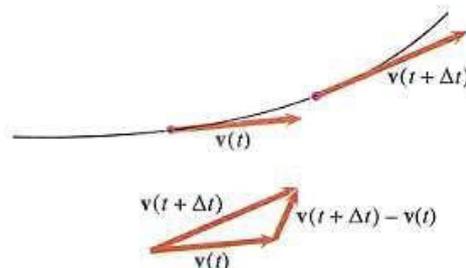
donde el numerador del límite es el cambio de posición, o desplazamiento de P , durante el intervalo de tiempo (Fig. c). Así, la Velocidad es la razón de cambio de la posición de P respecto a O .



La aceleración de P respecto a O en un tiempo I se define como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

donde el numerador del límite es el cambio en la velocidad de P durante el intervalo de tiempo (Fig. 2). La aceleración es la razón de cambio de la velocidad de P en el tiempo I (la segunda derivada respecto al tiempo del desplazamiento), y sus dimensiones son (distancia)/(tiempo).



3. Movimiento uniforme en línea recta:

El movimiento uniforme en línea recta es un tipo de movimiento en línea recta que a menudo se encuentra en las aplicaciones prácticas. En este movimiento, la aceleración a de una partícula es cero para todo valor de t . En consecuencia, la velocidad v es constante.

$$\int_{s_0}^s ds = v \int_0^t dt \rightarrow s - s_0 = vt \rightarrow s = s_0 + vt$$

4. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

Es otro tipo muy común de movimiento. En éste, la aceleración a de la partícula permanece constante.

✓ Velocidad en función del tiempo.

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c dt \quad \underline{\hspace{10em}} \quad v = v_0 + a_c t$$

✓ Posición en función del tiempo.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt \quad \underline{\hspace{10em}} \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

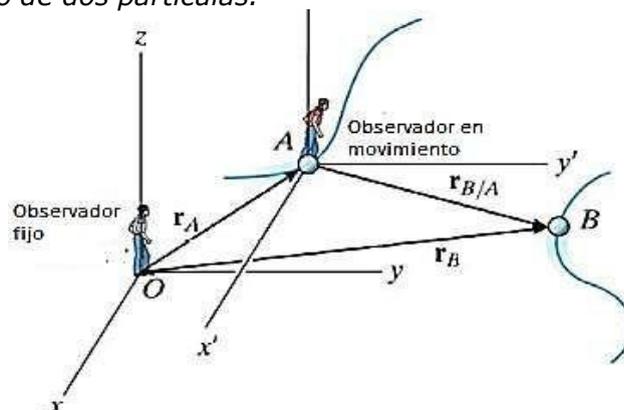
✓ Velocidad en función de la posición.

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a_c ds \quad \underline{\hspace{10em}} \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

5. Movimiento relativo:

Para el movimiento de varias partículas que se mueven de manera independiente a lo largo de una misma línea, es posible escribir ecuaciones de movimiento independientes para cada partícula.

Movimiento relativo de dos partículas.



Si las coordenadas de posición r_A y r_B se miden desde el mismo origen, la diferencia $(r_B - r_A)$ define la **coordenada de posición relativa de B con respecto A** y se denota por medio de $r_{B/A}$. Se tiene:

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

Derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$v_B = v_A + v_{B/A} \quad a_B = a_A + a_{B/A}$$

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 13

Tema: Cinemática de una Partícula

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

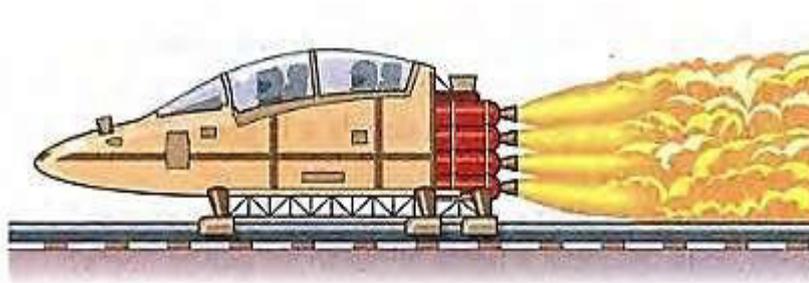
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. La lancha de la figura se va moviendo a 20 pie/s cuando su motor se apaga. Debido a la resistencia aerodinámica, su aceleración es $a = -0.1v^2$ pie/s²". ¿Cuál es la velocidad de la lancha 2 s después?



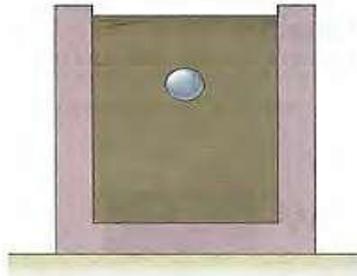
2. Un trineo de retro impulso parte del reposo y acelera con 312 m/s² hasta que su velocidad es de 1000 mis. En ese momento encuentra un freno de agua y su aceleración es $a = -0.001 v^2$ hasta que su velocidad disminuye a 500 mis. ¿Qué distancia total recorre el trineo?



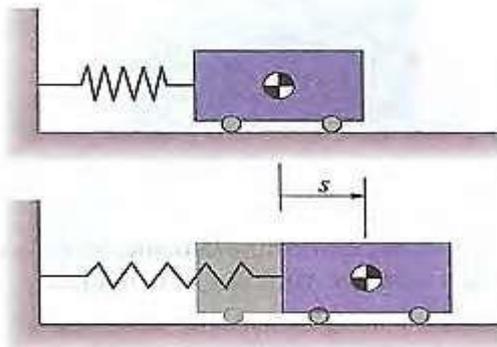
3. Un paracaidista salta de un helicóptero y va cayendo en línea recta a 30 m/s cuando se abre su paracaídas. A partir de ese momento su aceleración es aproximadamente igual a $a = g - cv^2$, donde 9.81 m/s^2 y c es una constante. Después de un periodo inicial de "transición", desciende a una velocidad de 5 m/s casi constante.
 - (a) ¿Cuál es el valor de c y cuáles son sus unidades SI?
 - (b) ¿A qué desaceleración máxima está sometido?
 - (c) ¿Cuál es su velocidad cuando ha caído 2 m desde el punto en que se abre su paracaídas?



4. Una bola de acero se libera del reposo en un recipiente de acero. Su aceleración hacia abajo es $a = 0.9g - cv$, donde g es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar y c es una constante. ¿Cuál es la velocidad de la bola en función del tiempo?



5. Un oscilador consiste en una masa y un resorte conectados como se muestra. La coordenada s mide el desplazamiento de la masa respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. Si el resorte es lineal, la masa está sometida a una desaceleración proporcional a s . Suponga que $a = -4s \text{ m/s}^2$ y que la masa tiene una velocidad $v = 1 \text{ m/s}$ en la posición $s = 0$.
- ¿Qué distancia se moverá la masa hacia la derecha antes de que el resorte la detenga?
 - ¿Qué velocidad tendrá la masa cuando regrese a la posición $s = 0$?



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

TEMA N° 14: SEGUNDA LEY DE NEWTON CINETICA DE PARTICULAS



La dinámica es la parte de la física que estudia las relaciones entre los movimientos de los cuerpos y las causas que los provocan, en concreto las fuerzas que actúan sobre ellos. Para entender estos fenómenos, el punto de partida es la observación del mundo cotidiano. Si se desea cambiar la posición de un cuerpo en reposo es necesario empujarlo o levantarlo, es decir, ejercer una acción sobre él. Aparte de estas intuiciones básicas, el problema del movimiento es muy complejo: todos aquellos que se observan en la naturaleza (caída de un objeto en el aire, movimiento de una bicicleta, un coche o un cohete espacial) son complicados.

De lo anterior, ahora requerimos analizar el problema del movimiento de un cuerpo desde un punto de vista de sus causas y efectos, por ello la segunda de las tres leyes de Newton para relacionar tal situación con las fuerzas que producen el movimiento y los sistemas acelerados.

1. Segunda ley de Newton.

La fuerza sobre una partícula es igual a la razón de cambio de su producto de su masa y de su velocidad, es decir de su **cantidad de movimiento**.

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mv)$$

En función de la aceleración y fuerza la segunda ley de Newton se enuncia así: *"El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime"*.

Luego si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza.

$$\sum F = ma$$

- ✓ Recordemos que la cantidad de movimiento es una magnitud física vectorial que describe el movimiento de un cuerpo en cualquier teoría mecánica.

- ✓ Si se conocen la masa de una partícula y la fuerza que actúa sobre ella, con la segunda ley podemos determinar su aceleración. Ya aprendimos a determinar la velocidad, posición y trayectoria de un punto si se conoce su aceleración. Por tanto, *la segunda ley ayuda a determinar el movimiento de una partícula si se conoce la fuerza que actúa sobre ella.*
- ✓ **Sistemas de referencia inerciales:** La primera ley de Newton sirve para definir un tipo especial de sistemas de referencia conocidos como sistemas de referencia inerciales, que son aquellos desde los que se observa que un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza neta se mueve con velocidad constante.
- ✓ Un sistema de referencia con aceleración (y la aceleración normal de un sistema rotatorio se incluye en esta definición) no es un sistema inercial, y la observación de una partícula en reposo en el propio sistema no satisfará las leyes de Newton (puesto que se observará aceleración sin la presencia de fuerza neta alguna). Se denominan sistemas de referencia no inerciales.

2. Ecuaciones de movimiento.

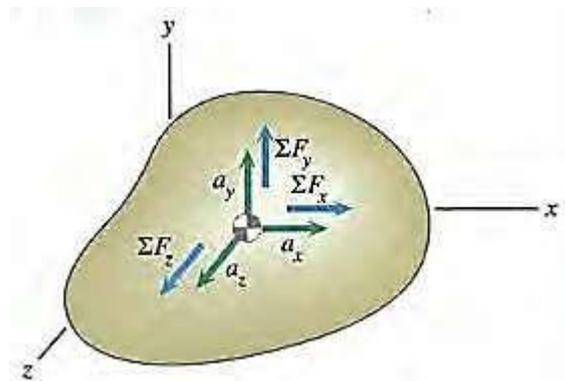
Considérese una partícula de masa m sobre la que actúan varias fuerzas. Se tiene que la segunda ley de Newton puede expresarse mediante la ecuación: $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ Que relaciona las fuerzas que actúan sobre la partícula y el vector $m\mathbf{a}$.

Componentes rectangulares.- Al descomponer cada fuerza \mathbf{F} y la aceleración \mathbf{a} en componentes rectangulares, se escribe:

$$\Sigma (F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}) = m(a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k})$$

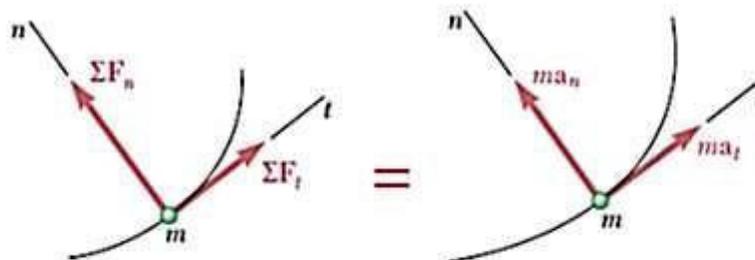
De lo que se deduce:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z$$



3. Componentes tangencial y normal

Al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en componentes a lo largo de la tangente a la trayectoria (en la dirección de movimiento) y la normal (hacia el interior de la trayectoria)



$$\Sigma F_t = ma_t \quad \Sigma F_n = ma_n$$

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 14

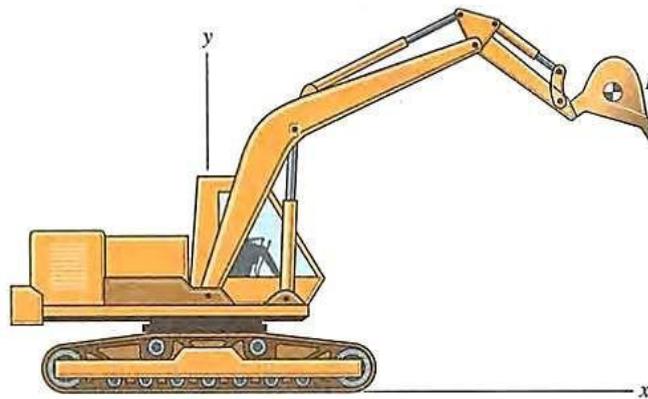
Tema: Segunda ley de Newton

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

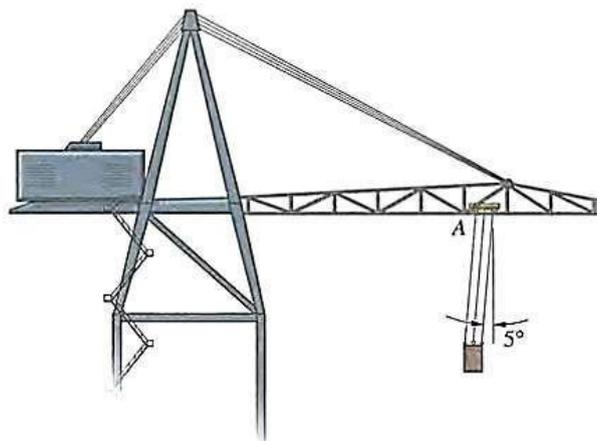
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

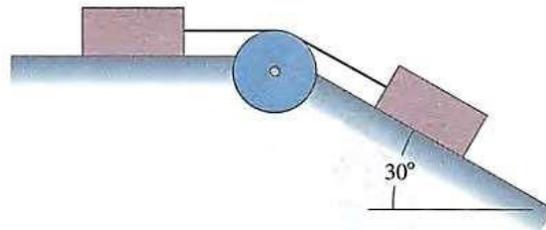
- El cangilón B de la figura pesa 400 lb la aceleración de su centro de masa es $a = -30i - 10j$ (pie/s²). Determine las componentes x y y de la fuerza total ejercida sobre el cangilón por sus soportes.



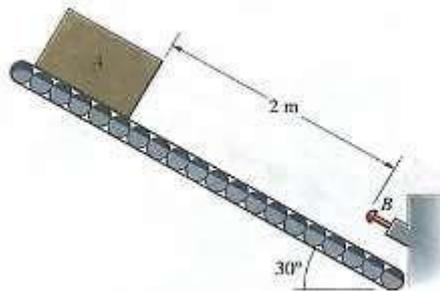
- La carretilla A de la grúa mostrada se mueve hacia la derecha con aceleración constante, y la carga de 800 kg se mueve sin oscilar.
 - ¿Cuál es la aceleración de la carretilla y de la carga?
 - ¿Cuál es la suma de las tensiones en los cables paralelos que soportan la carga?



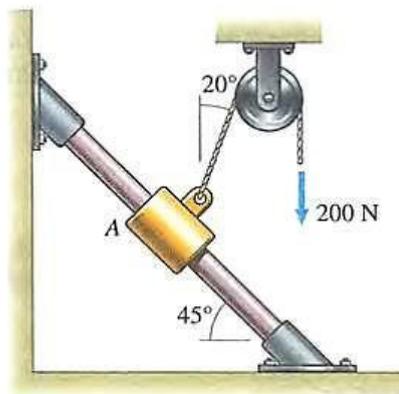
- Cada caja de la figura pesa 50 lb Y se puede ignorar la fricción. Si las cajas empiezan a moverse del reposo en $t = 0$, determine la magnitud de sus velocidades y la distancia que se han movido desde su posición inicial en $t = 1$ s.



4. En un proceso de ensamblado en línea, un paquete de 20 kg parte del reposo y se desliza hacia abajo por la rampa lisa. Suponga que se quiere diseñar el dispositivo hidráulico *B* mostrado para que ejerza una fuerza constante de magnitud *F* sobre el paquete y lo detenga en una distancia de 100mm. ¿Cuál es la fuerza *F* requerida?



5. ¿Cuál es la aceleración del collarín *A* de 8 kg respecto a la barra lisa?



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

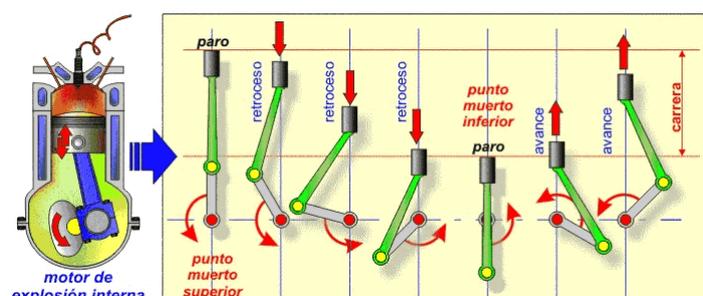
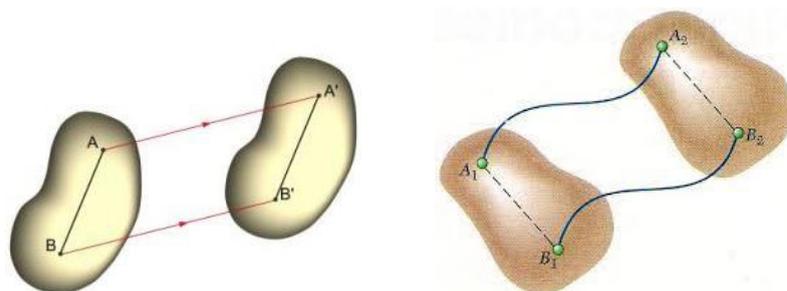
TEMA N° 15: CINEMÁTICA Y MOVIMIENTO DE CUERPOS RÍGIDOS

1. Cinemática del cuerpo rígido.
1.1. Tipos de movimiento de un cuerpo rígido
1.1.1. Traslación

La traslación ocurre cuando todas las partículas que forman el cuerpo rígido se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Es decir, cuando un segmento recto entre dos puntos dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento.

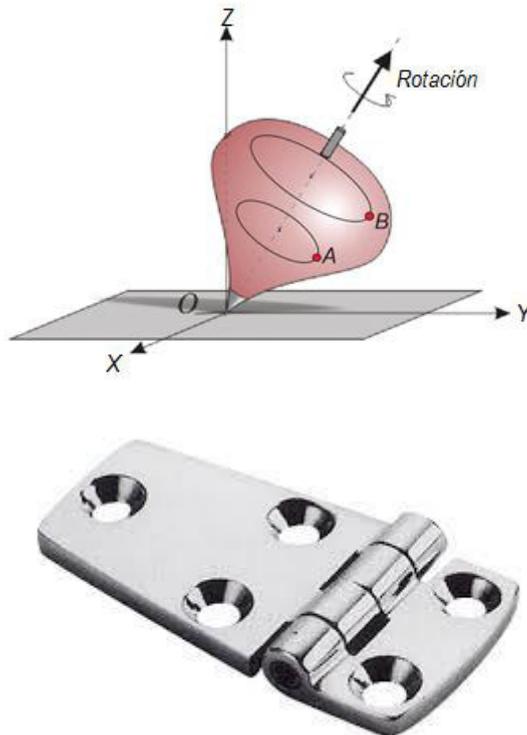
Traslación rectilínea: Cuando las trayectorias del movimiento de 2 partículas cualquiera del cuerpo forman líneas rectas equidistantes.

Traslación curvilínea: Cuando las trayectorias del movimiento de 2 partículas cualesquiera del cuerpo forman líneas curvas equidistantes.



1.1.2. Rotación alrededor de un eje fijo

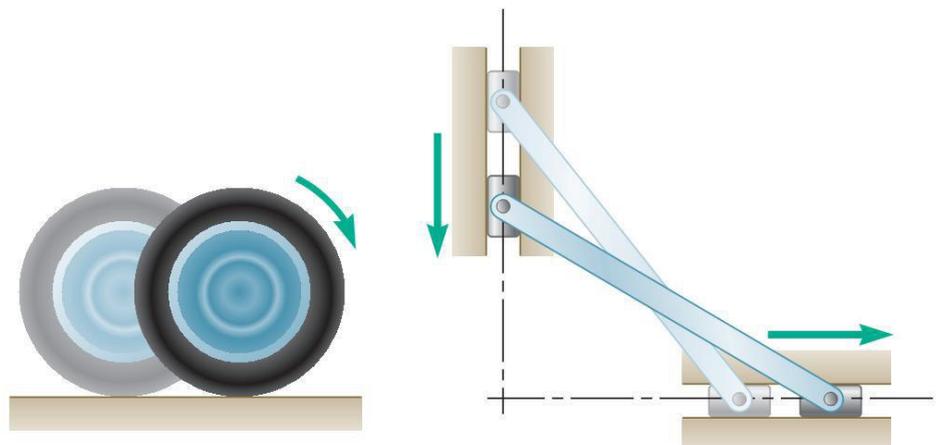
En este movimiento las partículas del cuerpo se mueven en planos paralelos a través de círculos centrados sobre el mismo eje fijo. Si el eje interseca al cuerpo rígido, las partículas localizadas sobre el eje tienen velocidad cero, y aceleración cero.



1.1.3. Movimiento plano general

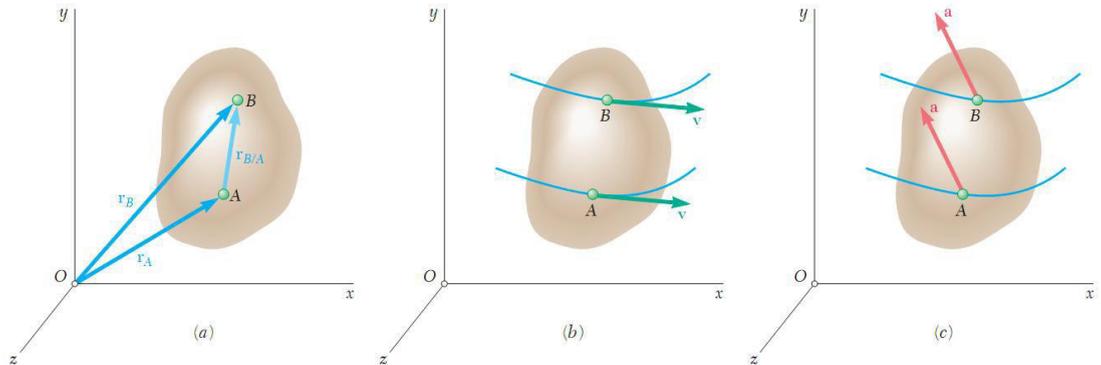
Cualquier movimiento en el plano que no esté destinado a ser cualquiera de los dos tipos de movimientos, ya sea traslación o rotación es determinado como *movimiento plano general*.

En muchos casos el movimiento plano general se da cuando un cuerpo experimenta una combinación de traslación y rotación. La traslación ocurre dentro de un plano de referencia y la rotación sobre un eje perpendicular a dicho plano de referencia.



1.2. Traslación

Cuando un cuerpo rígido está en traslación, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante dado. En el caso de traslación curvilínea, la velocidad y aceleración cambian en dirección y en magnitud.



Considerando los puntos A y B sobre el cuerpo rígido mostrado, se cumple la siguiente relación entre las posiciones respecto a un sistema de coordenadas fijo:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Como el vector $\mathbf{r}_{B/A}$ mantiene una dirección y magnitud constante durante la traslación ya que A y B permanecen en el mismo cuerpo rígido, la derivada de $\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{0}$

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A}$$

Por lo tanto:

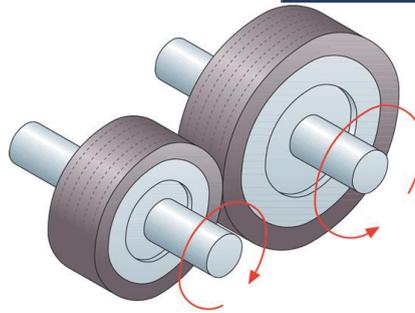
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

En el caso de traslación rectilínea todas las partículas del cuerpo se mueven a lo largo de líneas rectas paralelas y su velocidad y aceleración se mantienen en la misma aceleración durante el tiempo completo.

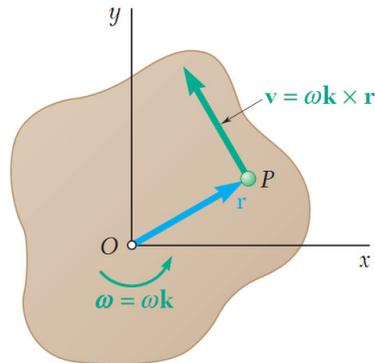
1.3. Rotación alrededor de un eje fijo

La relación entre velocidad, posición y aceleración para la rotación en un eje fijo puede ser demostrada en términos tridimensionales, o un acontecimiento plano. La presentación general proporciona un entorno fundamental para entender la presentación plana.



1.3.1. Rotación de una placa representativa

La rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo puede definirse mediante el movimiento de una placa representativa en un plano de referencia perpendicular al eje de rotación. El plano xy es el plano de referencia, y el eje de giro es el eje z , perpendicular al plano xy .



El vector velocidad angular ω tiene la dirección del vector unitario \underline{k} en el eje "z" positivo cuando gire en sentido anti horario.

$$\underline{\omega} = \omega \underline{k}$$

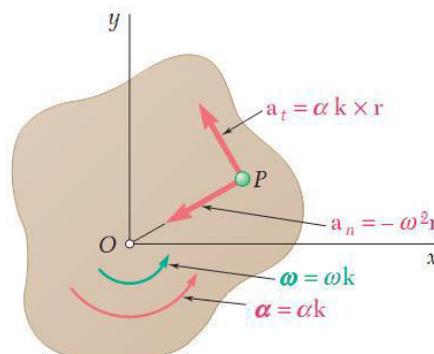
Por definición la velocidad de cualquier punto de la placa, está dada por el producto vectorial:

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

Puesto que r y k son perpendiculares, la magnitud de la velocidad v es:

$$v = \omega r$$

La dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria que forma la partícula en el movimiento de rotación. Es decir, a 90° de la dirección del radio en el sentido de movimiento.



De igual manera el vector aceleración angular " $\underline{\alpha}$ " tiene la dirección \underline{k} en el eje z positivo cuando gire en sentido anti horario.

$$\underline{\alpha} = \alpha \underline{k}$$

Por definición la aceleración tangencial de cualquier punto de la placa, está dada por el producto vectorial:

$$\underline{a}_t = \alpha \underline{k} \times \underline{r}$$

Puesto que r y k son perpendiculares, la magnitud de la aceleración tangencial es:

$$a_t = \alpha r$$

La aceleración centrípeta o normal se define como el producto de:

$$\underline{a}_n = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{v} = -\underline{\omega}^2 \times \underline{r}$$

El módulo de la aceleración normal es:

$$a_n = \omega^2 r$$

La dirección de la aceleración normal es siempre hacia el centro de rotación, es decir opuesta a la dirección radial.

El vector aceleración total del movimiento de rotación es:

$$\underline{a} = \underline{a}_t + \underline{a}_n$$

$$\underline{a} = \alpha \underline{k} \times \underline{r} - \omega^2 \times \underline{r}$$

1.3.2. Ecuaciones que definen el movimiento alrededor de un eje fijo.

Como un cuerpo rígido rota alrededor de algunos ejes fijos, la coordenada angular cambia con el tiempo. La coordenada angular puede ser expresada como una función del tiempo " t ". La relación entre la coordenada angular, velocidad, aceleración y tiempo son:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

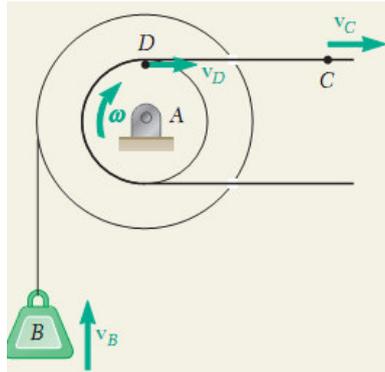
$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

Dos casos particulares de rotación en un eje fijo son frecuentemente encontrados:

Rotación Uniforme.- en caso de rotación uniforme la aceleración angular es cero. Por lo tanto, solo una de las ecuaciones es aplicable.

$$\int_0^t \underline{\omega} dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

Integrando resulta: $\theta = \theta_0 + \underline{\omega}t$



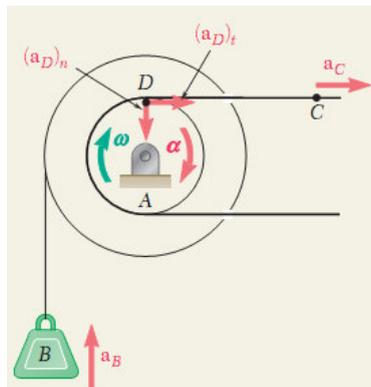
Rotación Uniformemente Acelerada.- en este caso la aceleración angular es constante. Por lo tanto, tres ecuaciones pueden ser derivadas para dicho movimiento:

$$\int_0^t \alpha dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \rightarrow \underline{\omega} = \underline{\omega}_0 + \alpha t$$

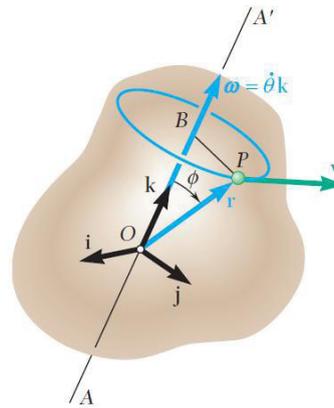
$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \underline{\omega} dt \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \alpha d\omega \rightarrow \underline{\omega}^2 = \underline{\omega}_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Recuerde que estas ecuaciones son solo aplicables cuando la aceleración angular es constante. Para otras situaciones se tiene que integrar de las anteriores.



Para el caso de cuerpos rígidos en tres dimensiones se deberá tomar en cuenta un análisis vectorial de las variables posición, velocidad y aceleración.



$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{\omega} = \omega \underline{k} = \dot{\theta} \underline{k}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{\omega} \times \underline{r})$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt}$$

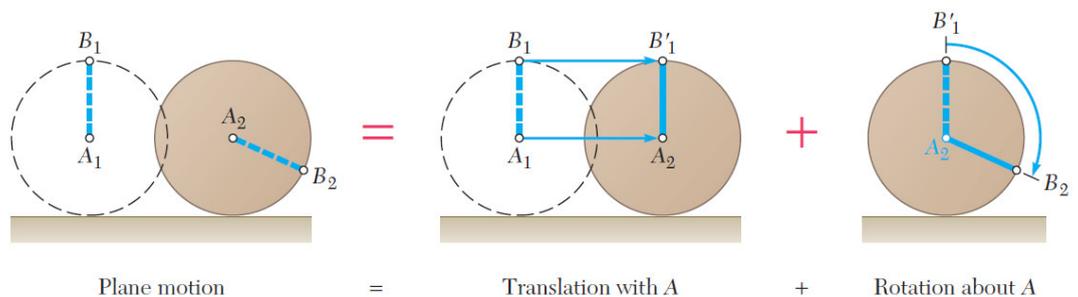
$$\underline{a} = \frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \underline{v}$$

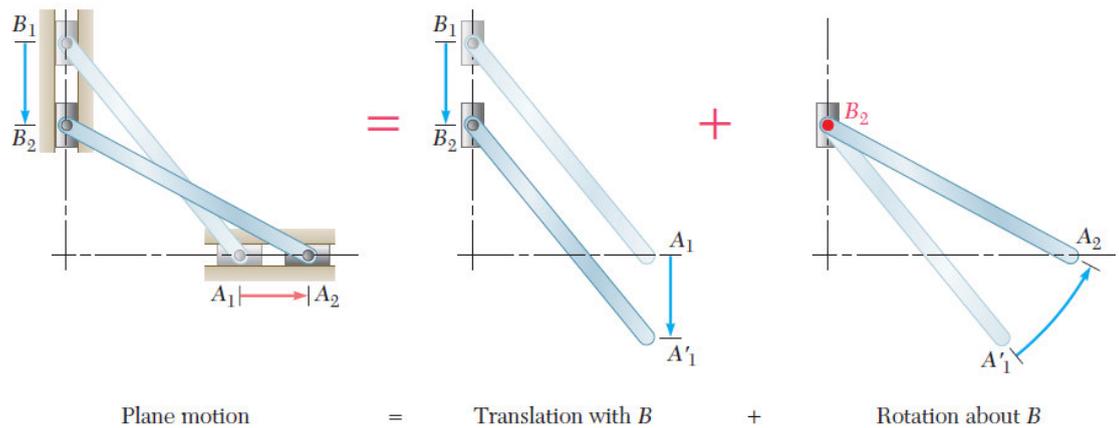
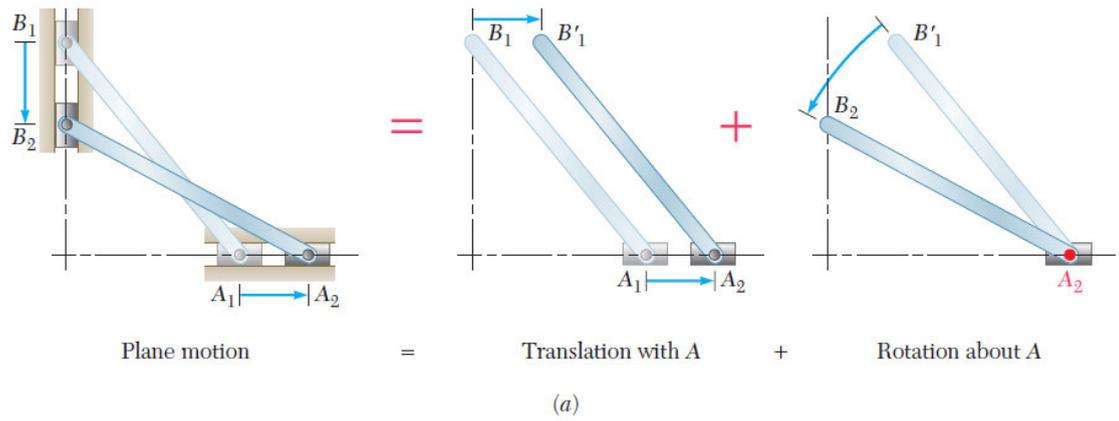
$$\underline{a} = \underline{\alpha} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

$$\underline{\alpha} = \dot{\underline{\omega}} = \dot{\omega} \underline{k} = \ddot{\theta} \underline{k}$$

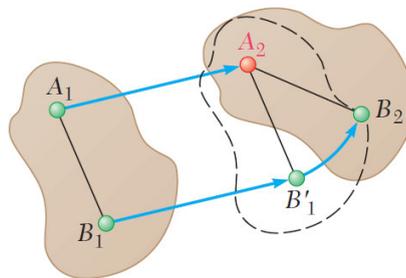
1.4. Movimiento plano general

El movimiento plano general es un movimiento que puede ser modelado como una combinación de dos tipos de movimientos. El movimiento general en el plano es la suma de la traslación pura y la rotación en un eje fijo.





1.4.1. Velocidad absoluta y velocidad relativa



Según el análisis gráfico del movimiento plano que se presenta, se puede deducir que:

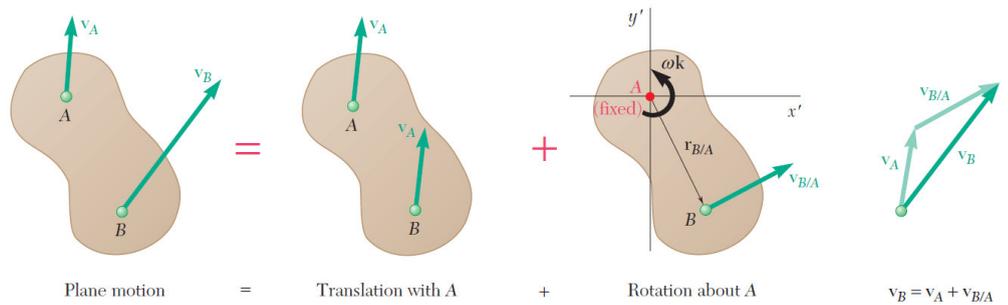
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} r$$

Donde "r" es la distancia de A a B.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$



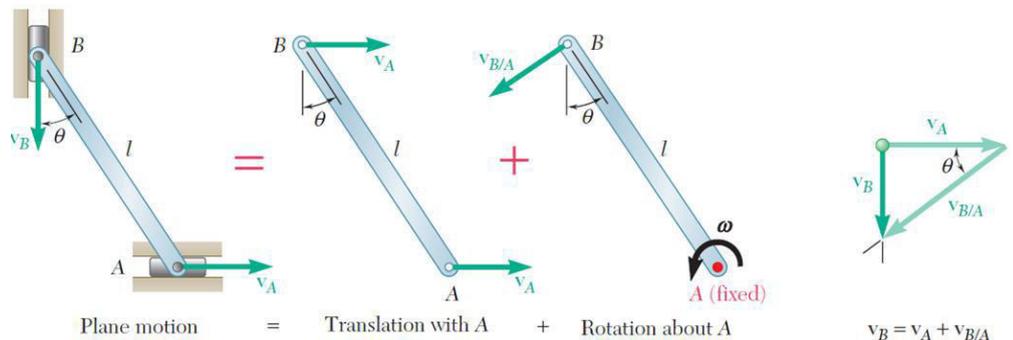
Para el movimiento de varillas:

Suponiendo que se conoce la velocidad V_A se propone encontrar la velocidad V_B y la *velocidad angular* de la varilla, la longitud " l " y el ángulo θ .

Se escoge al punto A como punto de referencia y se expresa que el movimiento dado es equivalente a la traslación con A y una rotación simultanea alrededor de A .

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

Tomemos en cuenta que se desconoce la dirección de $V_{B/A}$ pero se conoce la dirección de V_B , con lo que se puede completar el diagrama de velocidades del sistema.



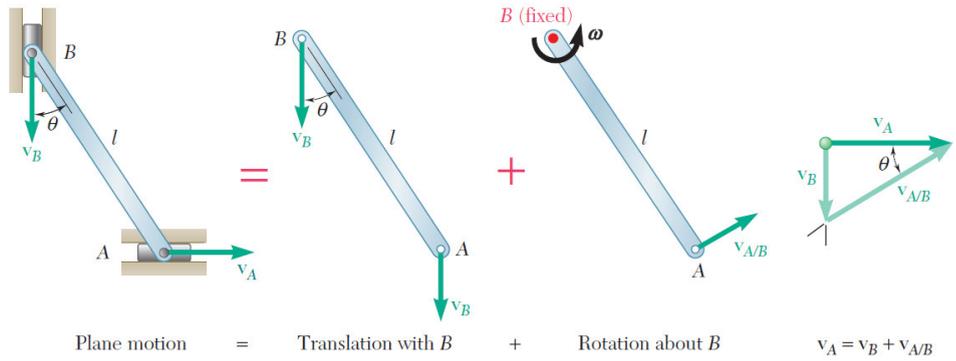
Al despejar las magnitudes de V_B y ω utilizando el triángulo de velocidades, se tiene:

$$v_B = v_A \tan \theta$$

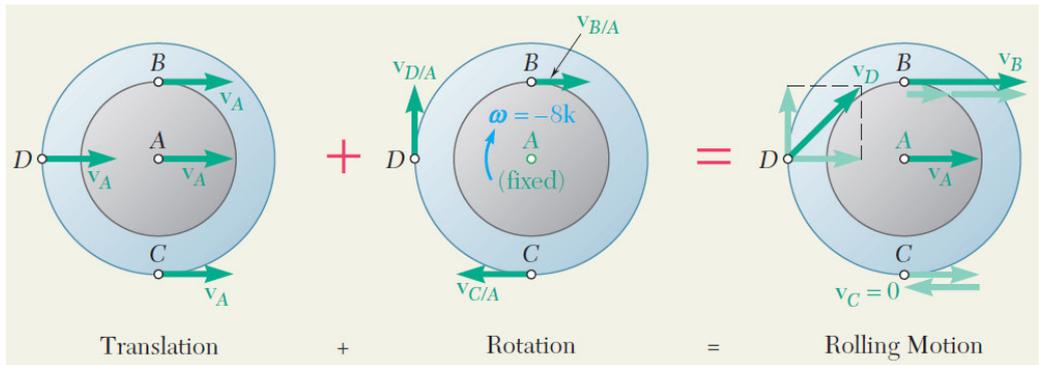
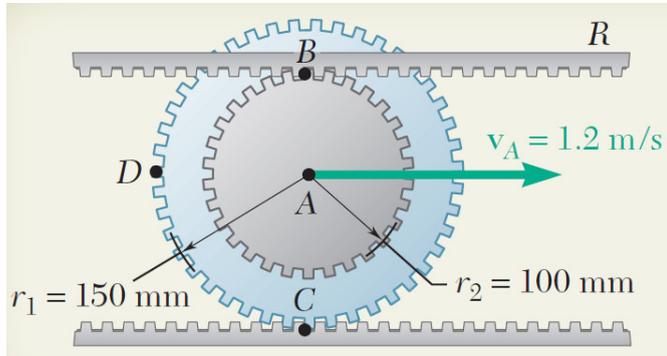
$$\omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

El mismo resultado se consigue utilizando B como punto de referencia, de manera que:

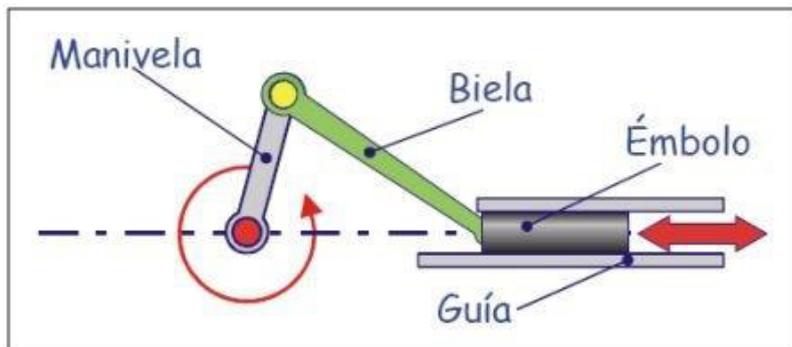
$$V_A = V_B + V_{A/B}$$

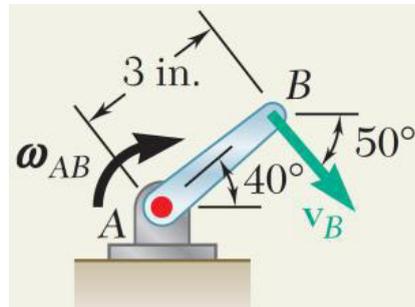
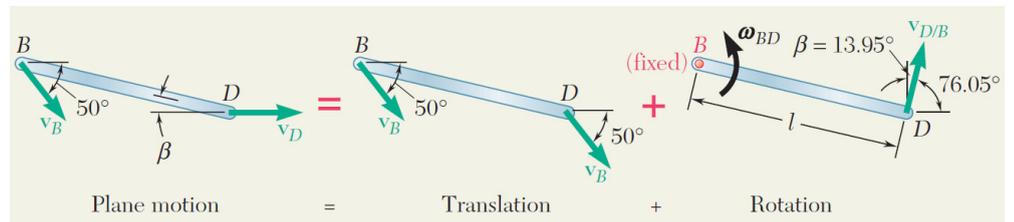


Importante: La velocidad angular ω de un cuerpo rígido en movimiento plano es independiente del punto de referencia.

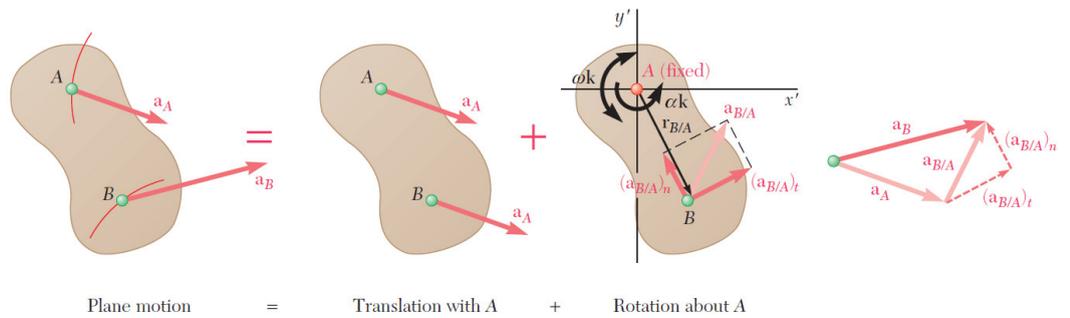


Movimiento plano



Movimiento de mecanismo biela – manivela

Movimiento de rotación

Movimiento plano
1.4.2. Aceleración absoluta y relativa

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{B/A}$$


Vectorialmente:

$$(\underline{a}_{B/A})_t = \alpha \underline{k} \times \underline{r}_{B/A}$$

$$(\underline{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \underline{r}_{B/A}$$

Escalarmente:

$$(a_{B/A})_t = \alpha r$$

$$(a_{B/A})_n = \omega^2 r$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \alpha \underline{k} \times \underline{r}_{B/A} - \omega^2 \underline{r}_{B/A}$$

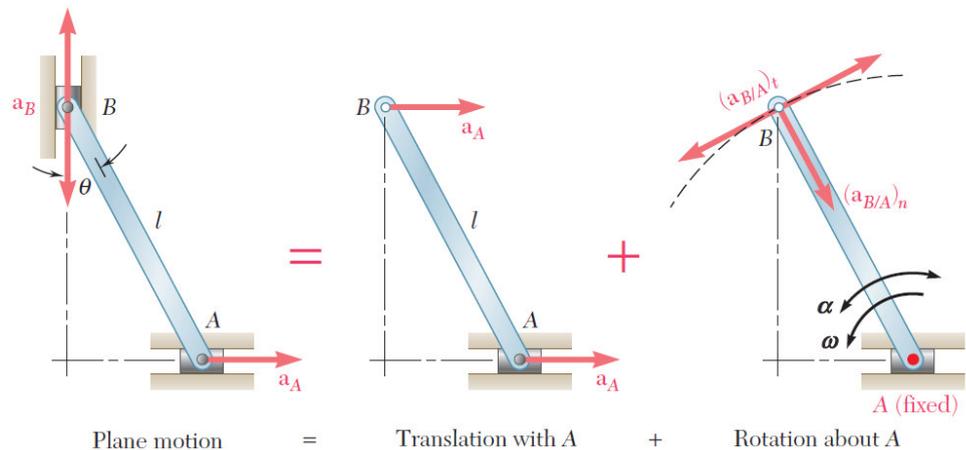
Conociendo la velocidad V_A y la aceleración a_A , se determina la aceleración y la *aceleración angular* α de la varilla. Al elegir A como punto de referencia, se expresa que el movimiento dado es equivalente a una traslación con A y a una rotación alrededor de A . La aceleración absoluta de B debe ser igual a la suma:

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

$$a_B = a_A + (a_{B/A})_t + (a_{B/A})_n$$

$$(a_{B/A})_n = \omega^2 l, \text{ dirigida hacia A}$$

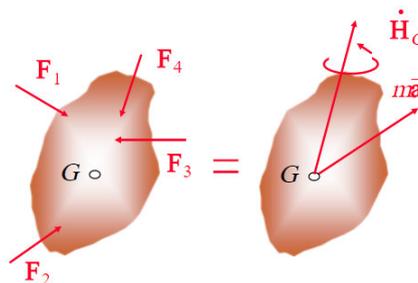
$$(a_{B/A})_t = l\alpha, \text{ perpendicular a AB}$$



2. Movimiento plano de cuerpos rígidos. Fuerza y aceleración

2.1. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido. Momento angular

Las relaciones existentes entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, la forma y la masa del cuerpo y el movimiento producido se estudian como cinética de los cuerpos rígidos. En general, el análisis que se da a continuación se restringe al movimiento plano de losas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia.



Las dos ecuaciones para el movimiento de un sistema de partículas se aplican al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. La primera ecuación define el movimiento del centro de masa G , del cuerpo.

$$\sum F = ma$$

Donde:

m : masa del cuerpo
 a : aceleración de G.

La segunda se relaciona con el movimiento del cuerpo relativo a un marco centroidal de referencia.

$$\sum M_G = \dot{H}_G$$

Donde:

\dot{H}_G : razón de cambio del momento angular H_G del cuerpo alrededor de su centro de masa G.

Estas ecuaciones expresan que el sistema de las fuerzas externas es equipolente al sistema que consta del vector $m\mathbf{a}$ adscrito a G y el par del momento \dot{H}_G .

Para el movimiento plano de losas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia, el momento angular del cuerpo se expresa como:

$$\underline{H}_G = \underline{I}\omega$$

Donde:

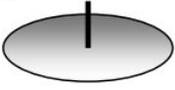
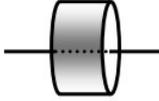
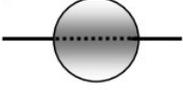
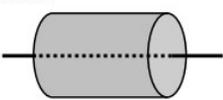
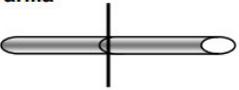
\underline{I} : momento de inercia del cuerpo alrededor de un eje centroidal perpendicular al plano de referencia

ω : velocidad angular del propio cuerpo. Si se derivan los dos miembros de esta ecuación:

$$\dot{\underline{H}}_G = \underline{I}\dot{\omega} = \underline{I}\alpha$$

$$\boxed{\sum M_G = \dot{H}_G = \underline{I}\dot{\omega} = \underline{I}\alpha}$$

IMPORTANTE: Para Hallar Momento de Inercia " \underline{I} "

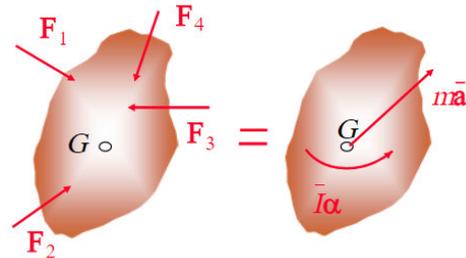
Disco 	$\frac{1}{2}mR^2$
Anillo 	mR^2
Esfera 	$\frac{2}{5}mR^2$
Cilindro 	$\frac{1}{2}mR^2$
Varilla 	$\frac{1}{12}ml^2$

Para el caso restringido que aquí se considera, la razón de cambio del momento angular del cuerpo rígido se puede representar por un vector con la misma dirección que la de $\underline{\hat{a}}$ (es decir, perpendicular al plano de referencia) y de magnitud $\underline{\hat{a}}$.

2.2. Principio de D'Alembert

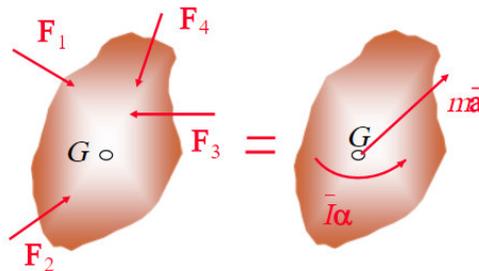
El movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico respecto al plano de referencia se define por las tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}\sum \underline{F}_x &= m\underline{a}_x \\ \sum \underline{F}_y &= m\underline{a}_y \\ \sum \underline{M}_G &= \underline{I}\alpha\end{aligned}$$



Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido en realidad son equivalentes a las fuerzas eficaces de las diversas partículas que forman el cuerpo. Esta proposición se conoce como principio de **d'Alembert**.

El principio de d'Alembert se puede expresar en la forma de un diagrama vectorial, en donde las fuerzas eficaces se representan por un vector $m\underline{\hat{a}}$ adscrito a G y un par $\underline{\hat{a}}$. En el caso de una losa en translación como observamos en la figura, las fuerzas eficaces se reducen a un solo vector $m\underline{\hat{a}}$; en tanto que en el caso particular de una losa en rotación centrodial, se reducen sólo al par $\underline{\hat{a}}$; en cualquier otro caso del movimiento plano, deben de incluirse tanto el vector $m\underline{\hat{a}}$ como el $\underline{\hat{a}}$.



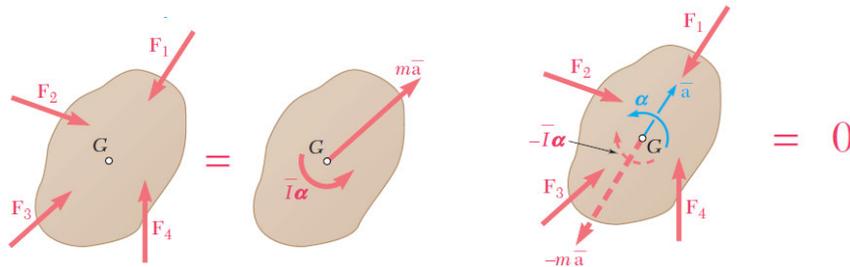
Cualquier problema relacionado con el movimiento plano de una losa rígida se puede resolver al trazar una ecuación de diagrama de cuerpo libre semejante a la que se muestra. Entonces se pueden obtener tres ecuaciones del movimiento al igualar las componentes x, las componentes y y los momentos alrededor de un punto arbitrario A , de las fuerzas y vectores que intervienen.

Se puede aplicar este método para resolver problemas que comprenden el movimiento plano de varios cuerpos rígidos conectados.

Algunos problemas, como la rotación no centrodial de barras y placas, el movimiento de rodadura de esferas y ruedas y el movimiento plano de diversos tipos de eslabonamientos, que se mueven bajo restricciones, deben complementarse con análisis cinemático.

2.3. Sistemas cuerpos rígidos

El método que se describe en la sección anterior también puede emplearse en problemas que implican el movimiento plano de varios cuerpos rígidos conectados. Para cada parte del sistema, es posible dibujar un diagrama similar a:



Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de estos diagramas se resuelven de manera simultánea.

En algunos casos, basta con dibujar un solo diagrama para todo el sistema. Este diagrama incluirá todas las fuerzas externas, así como los vectores $m\bar{a}$ y los pares $I\bar{\alpha}$ asociados con las diversas partes del sistema.

Sin embargo, fuerzas externas como las ejercidas por cables de conexión, pueden omitirse, ya que ocurren en pares de fuerzas iguales y opuestas y, por ello, son equipolentes a cero. Las ecuaciones obtenidas al expresar que el sistema de las fuerzas externas es equipolente al sistema de las fuerzas efectivas se resuelve para las incógnitas restantes.

No es posible utilizar este segundo planteamiento en problemas que implican más de tres incógnitas, ya que sólo se dispone de tres ecuaciones de movimiento cuando se usa un solo diagrama.

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 15

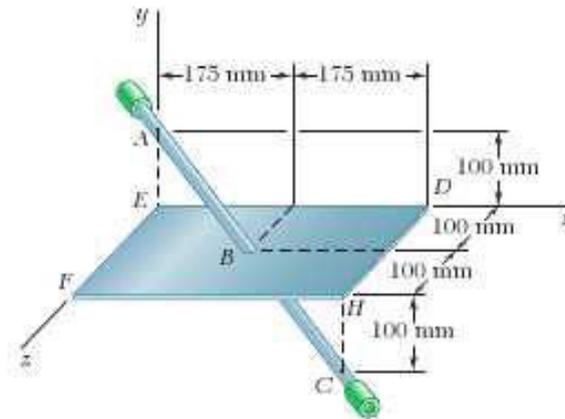
Tema: Segunda ley de Newton

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

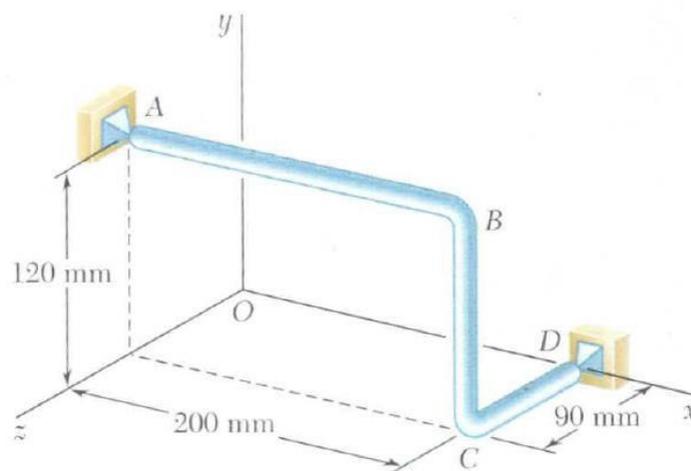
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

- El ensamble mostrado en la figura, consiste de una barra recta ABC que pasa a través y está soldada a la placa rectangular $DEFH$. El ensamble rota alrededor del eje AC con una velocidad angular constante de 9 rad/s . Sabiendo que el movimiento visto desde el extremo C es antihorario, determine la velocidad y aceleración de la esquina F .

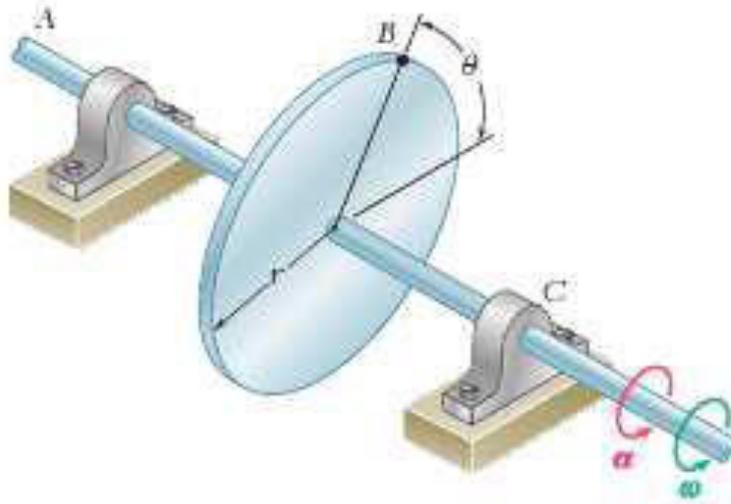


- La varilla acodada $ABCD$ gira con velocidad angular constante de 75 rad/s alrededor de una línea que une los puntos A y D . Si en el instante considerado la velocidad de la esquina C va hacia arriba, determine velocidad y aceleración para la esquina B .



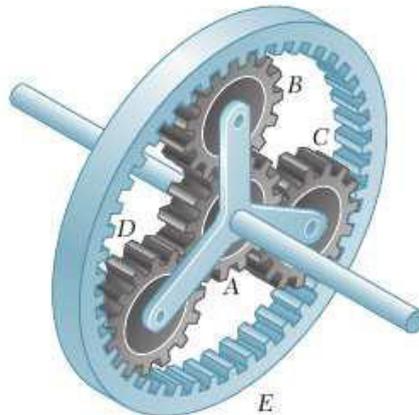
- La placa circular de 250 mm mostrada en la figura, está inicialmente en reposo y tiene una aceleración angular definida por la relación $\alpha = \alpha_0 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$. Sabiendo que $T = 1,5 \text{ s}$ y

que $\alpha_o = 10 \text{ rad/s}^2$, determine la magnitud de la aceleración total del punto B , cuando: (a) $t = 0$, (b) $t = 0,5$ (c) $t = 0,75$.



4. El radio del engrane central A del sistema de engranes planetarios mostrado es a , el radio de cada uno de los engranes planetarios es b y el radio del engrane exterior E es $(a + 2b)$. La velocidad angular del engrane A es ω_A en sentido horario y el engrane exterior es estacionario.

Si la velocidad angular de la araña BCD debe ser $\omega_A/5$ en sentido horario, a) determine el valor requerido de la relación b/a (b) la velocidad angular correspondiente de cada engrane planetario.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

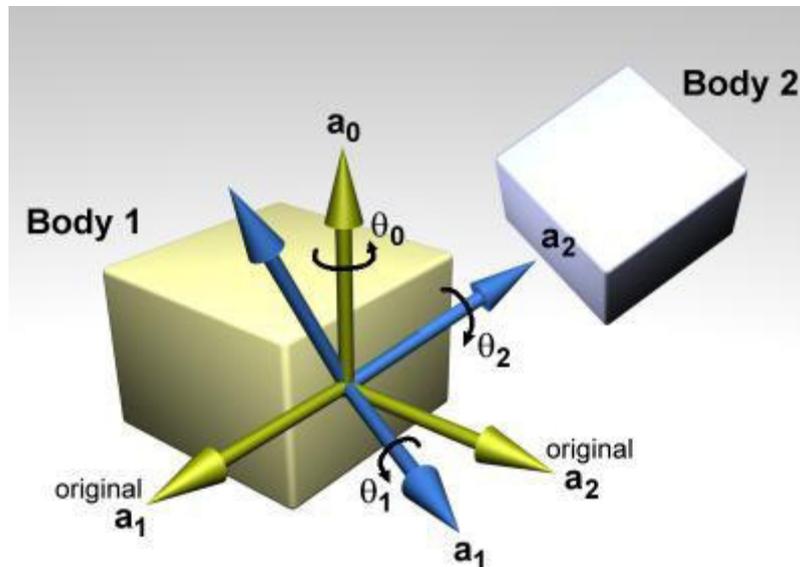
Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos

CUARTA UNIDAD

TEMA Nº 16: CINÉTICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES.



1. Estudios previos.

1.1. **Cinemática.** Estudia la geometría del movimiento, sin tener en cuenta las fuerzas que lo provocan. Es importante caracterizar el movimiento como de traslación rectilínea o curvilínea, de rotación alrededor de un eje fijo o como movimiento plano general, para la resolución de ejercicios.

1.2. **Traslación.** Cuando el cuerpo se mueve con traslación rectilínea o curvilínea, todos sus puntos tienen el mismo movimiento.

$$v_B = v_A$$

$$a_B = a_A$$

1.3. **Rotación respecto de un eje fijo.**
Movimiento angular.

Aceleración angular variable. Siempre que se dé una relación matemática entre cualquiera de dos de las cuatro variables, θ , ω , α y t , entonces puede determinarse una tercera variable al resolver una de las siguientes ecuaciones, las cuales se refieren a las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \alpha d\theta = \omega d\omega$$

Aceleración angular constante. Las siguientes ecuaciones son aplicables cuando es absolutamente cierto que la aceleración angular es constante.

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\omega = \omega_o + \alpha_c t$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_o)$$

Movimiento del punto P.

Con ω y α determinadas, el movimiento del punto P puede especificarse con las siguientes ecuaciones vectoriales o escalares.

$$\underline{v} = \omega r \rightarrow \underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{a}_t = \alpha r \\ \underline{a}_n = \omega^2 r \end{array} \right\} \underline{a} = \underline{\alpha} \times \underline{r} - \omega^2 \underline{r}$$

Movimiento plano general y análisis de movimiento relativo.

Recuerde que cuando se colocan ejes trasladantes en el "punto base" A, el movimiento relativo del punto B con respecto a A es simplemente movimiento circular de B con respecto a A. Las siguientes ecuaciones son aplicables a los dos puntos A y B localizados en el mismo cuerpo rígido.

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{B/A} = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{B/A}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{a}_{B/A} = \underline{a}_A + \underline{\alpha} \times \underline{r}_{B/A} - \omega^2 \underline{r}_{B/A}$$

- 1.4. **Cinética.** Estudia las fuerzas externas que provocan el movimiento. Cuando se aplican las ecuaciones necesarias, es importante establecer primero el sistema de coordenadas inercial y definir las direcciones positivas de los ejes. Las direcciones deberán ser las mismas que las seleccionadas cuando se escribe cualquiera de las ecuaciones de cinemática si llega a ser necesaria una solución simultánea.

Ecuaciones de movimiento.

Estas ecuaciones se utilizan para determinar los movimientos acelerados o las fuerzas que provocan el movimiento. Si se utilizan para determinar la posición, velocidad o el tiempo del movimiento, entonces se tendrá que considerar la cinemática para completar la solución. Antes de aplicar las ecuaciones de movimiento, siempre trace un diagrama de cuerpo libre para identificar todas las fuerzas que actúan en el cuerpo. Además, establezca las direcciones de la aceleración del centro de masa y la aceleración angular del cuerpo. (También puede trazarse un diagrama cinético para representar maG e IGA gráficamente. Este diagrama es en particular conveniente para descomponer maG en componentes y para identificar los términos en la suma de momentos ©(mk)P.)

Las tres ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

$$\sum M_G = I_G \alpha$$

Trabajo y energía.

La ecuación de trabajo y energía se utiliza para resolver problemas que implican

fuerza, velocidad y desplazamiento.

Antes de aplicar esta ecuación, siempre trace un diagrama de cuerpo libre del cuerpo para identificar las fuerzas que realizan trabajo. Recuerde que la energía cinética del cuerpo se debe al movimiento de traslación del centro de masa, V_G , y al movimiento de rotación del cuerpo, ω .

$$T_1 + \sum U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

Donde:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

$$U_F = \int F \cos \theta ds \quad \text{fuerza variable}$$

$$U_{F_c} = F_c \cos \theta (s_2 - s_1) \quad \text{fuerza constante}$$

$$U_W = -W\Delta y \quad \text{peso}$$

$$U_s = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) \quad \text{resorte}$$

$$U_M = M\theta \quad \text{momento de par constante}$$

Si las fuerzas que actúan en el cuerpo son fuerzas conservadoras, entonces aplicamos la ecuación de la conservación de la energía.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Donde:

$$V = V_g + V_e$$

$$V_g = Wy$$

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2$$

Impulso y cantidad de movimiento.

Los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular se utilizan para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. Antes de aplicar las ecuaciones, trace un diagrama de cuerpo libre para identificar todas las fuerzas que crean impulsos lineales y angulares en el cuerpo. Además, establezca las direcciones de la velocidad del centro de masa y la velocidad angular del cuerpo justo antes y justo después de que se aplican los impulsos.

$$m(\underline{v}_G)_1 + \sum \int \underline{F} dt = m(\underline{v}_G)_2$$

$$(H_G)_1 + \sum \int \underline{M}_G dt = (H_G)_2$$

$$(H_o)_1 + \sum \int \underline{M}_o dt = (H_o)_2$$

Conservación de cantidad de movimiento.

Si en el cuerpo actúan fuerzas no impulsoras en una dirección particular, o si los movimientos de varios cuerpos intervienen en el problema, entonces considere aplicar la conservación de cantidad de movimiento lineal o angular en la solución.

$$m(\underline{v}_G)_1 = m(\underline{v}_G)_2$$

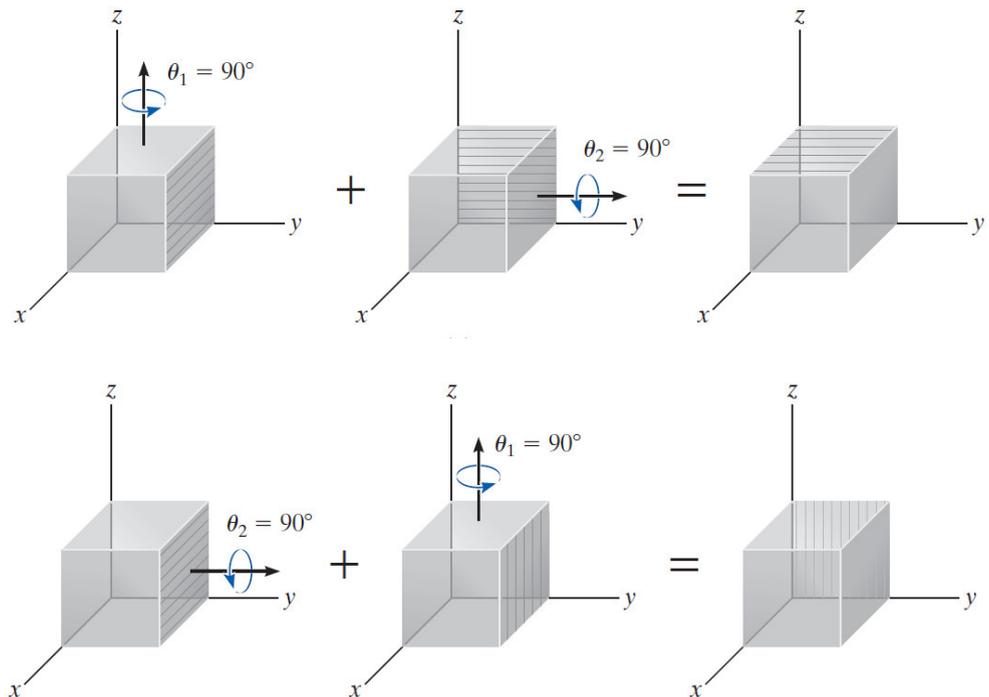
$$(H_o)_1 = (H_o)_2$$

2. Rotación alrededor de un eje fijo.

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje o punto fijo, la distancia r del punto de una partícula localizada en el cuerpo es la misma para cualquier posición del cuerpo. Por tanto, la trayectoria del movimiento de la partícula queda en la superficie de una esfera de radio r con su centro en el punto fijo.

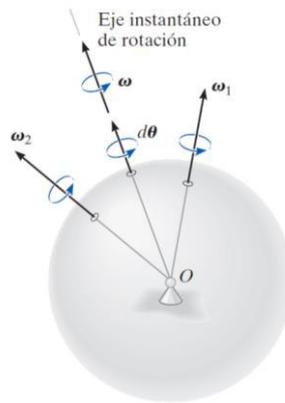
2.1. Teorema de Euler. El teorema de Euler establece que dos rotaciones “componentes” alrededor de ejes diferentes que pasan por un punto equivalen a una sola rotación resultante alrededor de un eje que pasa por el punto. Si se aplican más de dos rotaciones, pueden combinarse en pares y cada par puede reducirse y combinarse aún más en una rotación.

2.2. Rotaciones finitas. Si las rotaciones componentes utilizadas en el teorema de Euler son finitas, es importante mantener el orden en el que se aplican. Para demostrar esto, considere las dos rotaciones finitas $\theta_1 = \theta_2$, aplicadas al bloque como se muestra en la figura. Cada rotación tiene una magnitud de 90° y una dirección definida por la regla de la mano derecha, como se indica con la flecha. La posición final del bloque se muestra a la derecha. Cuando estas dos rotaciones se aplican en el orden $\theta_2 = \theta_1$, como se muestra en la figura siguiente, la posición final del bloque no es la misma que la de la figura anterior. Como las rotaciones finitas no obedecen la ley conmutativa de la adición ($\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$), no pueden clasificarse como vectores.



2.3. Velocidad angular. Si el cuerpo se somete a una rotación angular $d\theta$ alrededor de un punto fijo, la velocidad angular del cuerpo se define por medio de la derivada con respecto al tiempo,

$$\boxed{\omega = \dot{\theta}}$$



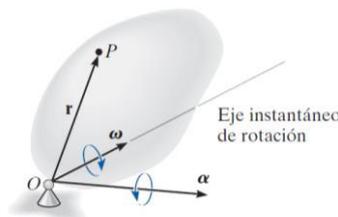
La línea que especifica la dirección de ω , la cual es colineal con $d\theta$ se conoce como eje de rotación instantáneo. En general, este eje cambia de dirección durante cada instante. Como $d\theta$ es una cantidad vectorial, ω también lo es, y se desprende de la adición vectorial que si el cuerpo se somete a dos componentes de movimientos angulares $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ y $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, la velocidad angular resultante es:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

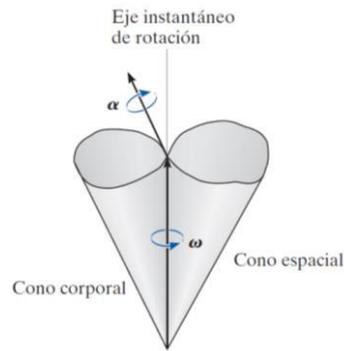
2.4. Aceleración angular. La aceleración angular del cuerpo se determina con la derivada con respecto al tiempo de su velocidad angular, es decir,

$$\alpha = \dot{\omega}$$

Para movimiento con respecto a un punto fijo, α debe responder del cambio tanto de magnitud como de dirección de ω , así que, en general, la dirección de α no es a lo largo del eje instantáneo de rotación.



A medida que cambia la dirección del eje instantáneo de rotación (o la línea de acción de ω) en el espacio, el lugar geométrico del eje genera un cono espacial fijo, Si el cambio de dirección de este eje se considera con respecto al cuerpo que gira, el lugar geométrico del eje genera un cono corporal. En un instante dado, estos conos se encuentran a lo largo del eje instantáneo de rotación, y cuando el cuerpo está en movimiento, el cono corporal parece que rueda sobre la superficie interna o sobre la superficie externa del cono espacial fijo. Dado que la cabeza del vector ω describe las trayectorias definidas por los extremos abiertos de los conos, entonces α debe actuar tangente a estas trayectorias en cualquier instante dado, puesto que el cambio con respecto al tiempo de ω es igual a α .



- 2.5. **Velocidad.** Conocido ω , es factible determinar la velocidad de cualquier punto en un cuerpo que gira alrededor de un punto fijo.

$$\underline{V} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

Donde:

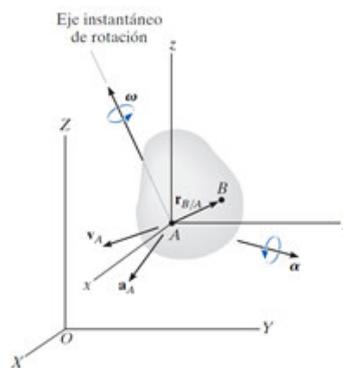
r : define la posición del punto medida con respecto al punto fijo.

- 2.6. **Aceleración.** Si en un instante dado ω y α son conocidas, la aceleración de un punto se obtiene con la derivada con respecto al tiempo, la cual resulta:

$$\underline{a} = \underline{\alpha} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

3. Movimiento General

En la figura se muestra un cuerpo sometido a movimiento general en tres dimensiones con una velocidad angular ω y una aceleración angular α . Si se sabe que el punto A tiene un movimiento de \underline{V}_A y \underline{a}_A , el movimiento de cualquier otro punto B se determina por medio de un análisis de movimiento relativo.



$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{B/A}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\alpha} \times \underline{r}_{B/A} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{B/A})$$

Estas dos ecuaciones son idénticas a las que describen el movimiento plano general de un cuerpo rígido. Sin embargo, su aplicación se complica cuando el movimiento es tridimensional, porque α ahora mide el cambio tanto de magnitud como de dirección de ω .

PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 16

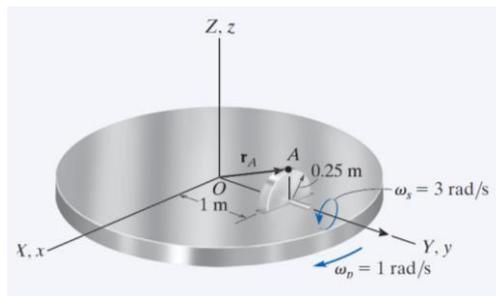
Tema: Cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

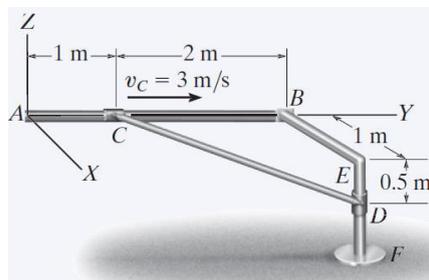
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

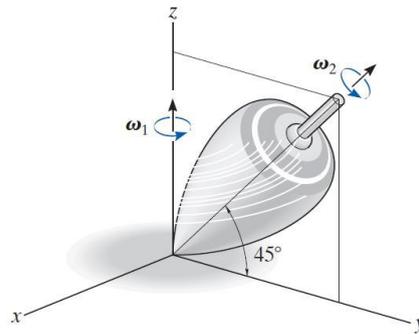
- El disco mostrado en la figura, gira alrededor de su eje a una velocidad angular constante $\omega_s = 3 \text{ rad/s}$, mientras que la plataforma horizontal sobre la cual está montado el disco gira alrededor del eje vertical a una velocidad constante $\omega_p = 1 \text{ rad/s}$. Determine la aceleración angular del disco y la velocidad y aceleración del punto **A** del disco cuando está en la posición mostrada.



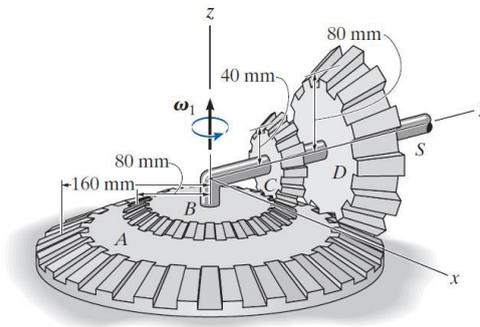
- Si el collarín en **C**, como se muestra en la figura, se mueve hacia **B** a una rapidez de 3 m/s , determine la velocidad del collarín en **D** y la velocidad angular de la barra en el instante que se muestra. La barra está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica.



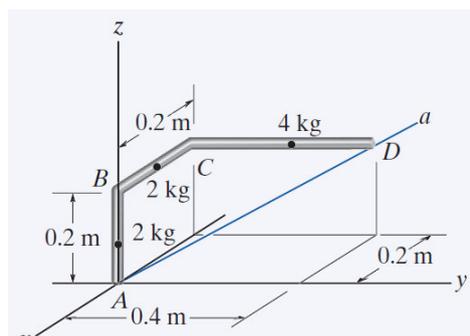
- El movimiento del trompo es tal que en el instante que se muestra gira alrededor del eje **Z** a $\omega_1 = 0.6 \text{ rad/s}$, mientras que gira alrededor de su propio eje a $\omega_2 = 8 \text{ rad/s}$. Determine la velocidad y aceleración angulares del trompo en este instante. Expresé el resultado como un vector cartesiano.



4. Los engranes *A* y *B* están fijos mientras que los engranes *C* y *D* giran libremente alrededor del eje *S*. Si éste gira alrededor del eje *z* a una velocidad constante de $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$, determine la velocidad y aceleración angulares del engrane *C*.



5. Determine el momento de inercia de la barra acodada que se muestra en la figura, con respecto al eje *A*.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

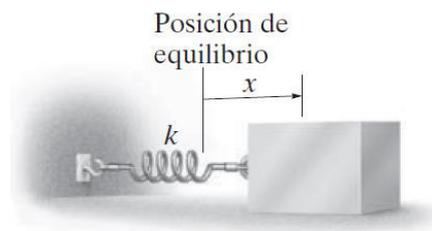
Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos

TEMA Nº 17: VIBRACIONES MECÁNICAS.

1. Vibración libre no amortiguada

Una vibración es el movimiento periódico de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados desplazados de una posición de equilibrio. En general, existen dos tipos de vibración, libre y forzada. La vibración libre ocurre cuando el movimiento se mantiene por fuerzas gravitacionales o elásticas, como el movimiento oscilatorio de un péndulo o la vibración de una barra elástica. La vibración forzada es provocada por una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema. Ambos tipos de vibración pueden ser amortiguados o no amortiguados. Las vibraciones no amortiguadas pueden continuar por tiempo indefinido porque los efectos de fricción se omiten en el análisis. Como en realidad tanto las fuerzas de fricción internas como las externas están presentes, el movimiento de todos los cuerpos vibratorios de hecho es amortiguado.

El tipo más simple de movimiento vibratorio es la vibración libre no amortiguada representada, por:



La fuerza de restauración elástica $F = kx$ siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio, mientras que se supone que la aceleración a actúe en la dirección del desplazamiento positivo. Como $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \\ -kx &= m\ddot{x}\end{aligned}$$

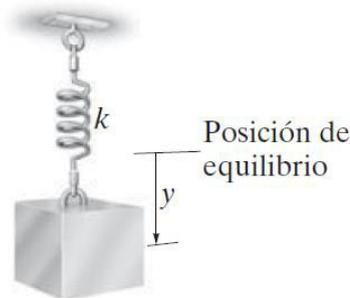
Observamos que la aceleración es proporcional al desplazamiento del bloque. El movimiento descrito de esta manera se llama **movimiento armónico simple**. Al reordenar los términos en una “forma estándar” obtenemos:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 = 0$$

La constante ω_n se llama frecuencia natural, y está representado por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si el caso fuese, como observamos en la figura:



Cuando el bloque está en equilibrio, el resorte ejerce una fuerza dirigida hacia arriba de $F = W = mg$, en el bloque. Por consiguiente, cuando el bloque se desplaza una distancia "y" hacia abajo de esta posición, la magnitud de la fuerza del resorte es $F = W + ky$. Aplicamos ecuaciones de movimiento y obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ -W - ky + W &= m\ddot{y} \end{aligned}$$

O bien:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 = 0$$

De la ecuación: $\ddot{x} + \omega_n^2 = 0$, se puede deducir:

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \operatorname{cos} \omega_n t$$

Aquí A y B representan dos constantes de integración. La velocidad y aceleración del bloque se determinan por el cálculo de derivadas sucesivas con respecto al tiempo, de lo cual resulta:

$$\begin{aligned} v &= \dot{x} = A\omega_n \operatorname{cos} \omega_n t - B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t \\ a &= \ddot{x} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t - B\omega_n^2 \operatorname{cos} \omega_n t \end{aligned}$$

La ecuación $x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \operatorname{cos} \omega_n t$, también puede expresarse en función de un movimiento senoidal, así:

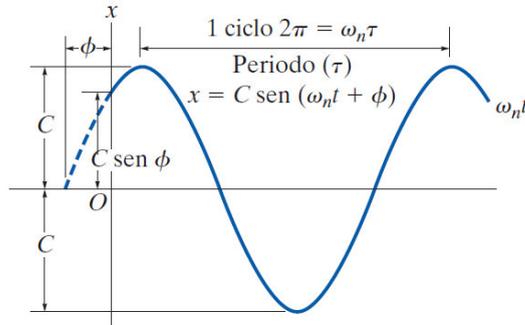
$$\begin{aligned} A &= C \operatorname{cos} \phi \\ B &= C \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

Donde C y ϕ son constantes nuevas que se determinarán en lugar de A y B .

$$x = C \cos \phi \sin \omega_n t + C \sin \phi \cos \omega_n t$$

$$x = C \sin(\omega_n t + \phi)$$

Si esta ecuación se traza sobre un eje $x - \omega_n t$, se obtiene la gráfica:



Donde: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

El ángulo de fase, es:

$$\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

un ciclo en el tiempo $t = \tau$, cuando: $\omega_n \tau = 2\pi$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Este intervalo se llama periodo, también se puede expresar:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

La frecuencia f se define como el número de ciclos completados por unidad de tiempo, lo cual es el recíproco del periodo, así:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La frecuencia se expresa en ciclos/s. Esta relación de unidades se llama *hertz* (Hz), donde $1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 2\pi \text{ rad/s}$.

Cuando un cuerpo o sistema de cuerpos conectados experimenta un desplazamiento inicial a partir de su posición de equilibrio y se deja libre, vibrará con una frecuencia natural, ω_n . Siempre que el sistema tenga un grado de libertad, es decir, que se requiera sólo una coordenada para especificar por completo la posición del sistema en cualquier momento, entonces el movimiento vibratorio tendrá las mismas características que el movimiento

armónico simple del bloque y resorte que se acaban de presentar.

2. Métodos de energía.

Como las fuerzas estudiadas son conservadoras, también es posible utilizar la ecuación de conservación de la energía para obtener la frecuencia natural de oscilación o periodo de vibración del cuerpo.

Cuando un bloque se desplaza una distancia “ x ” de la posición de equilibrio, la energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial es $V = \frac{1}{2}kx^2$. Como la energía se conserva, es necesario que:

$$T + V = cte.$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte.$$

La ecuación diferencial que describe *el movimiento acelerado* del bloque se obtiene por diferenciación de esta ecuación con respecto al tiempo, es decir,

$$m\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Como la velocidad \dot{x} no siempre es cero en un sistema sometido a vibración, se tiene:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Vibración forzada no amortiguada

Sus principios se usan para describir el movimiento de muchos tipos de máquinas y estructuras.

Fuerza periódica:

A través del gráfico, buscaremos representar las características vibratorias de un sistema sometido a una fuerza periódica $F = F_o \text{sen}\omega_o t$. Esta fuerza tiene una amplitud de F_o y una frecuencia forzada ω_o . El diagrama de cuerpo libre del bloque desplazado una distancia “ x ”. Al aplicar la ecuación de movimiento, se tiene:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$F_o \text{sen}\omega_o t - kx = m\ddot{x}$$

O bien:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m} \text{sen}\omega_o t$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo grado no homogénea. La solución general consta de una solución complementaria, x_c , más una solución particular, x_p .

La solución complementaria, se determina al establecer el término del lado derecho de la ecuación anterior igual a cero y resolver la ecuación homogénea resultante. La ecuación

siguiente define la solución, es decir,

$$x_c = C \text{sen}(\omega_n t + \phi)$$

donde ω_n es la frecuencia natural, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La solución particular, se define:

$$x_p = X \text{sen} \omega_o t$$

Si derivamos y sustituimos, obtenemos:

$$x_p = \frac{\frac{F_o}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2} \text{sen} \omega_o t$$

La solución general es, por consiguiente, la suma de dos funciones seno de frecuencias diferentes.

$$x = x_c + x_p = C \text{sen}(\omega_n t + \phi) + x_p = \frac{\frac{F_o}{k}}{1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2} \text{sen} \omega_o t$$

La amplitud de la vibración forzada o de estado continuo depende de la relación de frecuencia $0 > n$. Si el factor de **amplificación** MF se define como la relación de la amplitud de la **vibración de estado continuo**, X , a la deflexión estática $\frac{F_o}{k}$, producida por la amplitud de la fuerza periódica F_o , entonces:

$$MF = \frac{X}{\frac{F_o}{k}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2}$$

Desplazamiento periódico del soporte. Las vibraciones forzadas también pueden ser originadas por la excitación periódica del soporte de un sistema. Aplicamos la ecuación de movimiento y obtenemos:

$$\begin{aligned} F_x &= m a_x \\ -k(x - \delta_o \text{sen} \omega_o t) &= m \ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{k}{m} x &= \frac{k \delta_o}{m} \text{sen} \omega_o t \end{aligned}$$

4. Vibración libre viscosa amortiguada

El análisis de vibración considerado hasta ahora no ha incluido los efectos de fricción o amortiguación en el sistema y, en consecuencia, las soluciones obtenidas no corresponden del todo al movimiento real.

En muchos casos la amortiguación se atribuye a la resistencia creada por la sustancia, agua, aceite o aire, en la cual vibra el sistema. Siempre que el cuerpo se mueva lentamente

a través de esta sustancia, la resistencia al movimiento es directamente proporcional a la rapidez del cuerpo.

$$F = c\dot{x}$$

donde la constante **C** se llama **coeficiente de amortiguación viscosa** y sus unidades son N s/m o lb s/pie.

Aplicando la ecuación de movimiento se tiene:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \\ -kx - c\dot{x} &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0\end{aligned}$$

La solución de esta ecuación diferencial homogénea lineal de segundo grado tiene la forma:

$$x = e^{\lambda t}$$

donde **e** es la base del logaritmo natural y λ (lambda) es una constante.

El valor de λ se obtiene al sustituir esta solución y sus derivadas con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} &= 0 \\ e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) &= 0\end{aligned}$$

Como $e^{\lambda t}$ nunca puede ser cero, una solución es posible siempre que:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Por consiguiente, según la fórmula cuadrática, los dos valores de λ son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

El **coeficiente de amortiguación crítica** C_c como el valor de **C** que hace que el radical presente en la ecuación sea igual a cero, es decir;

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

Sistema sobreamortiguado. Cuando $C < C_c$, las raíces λ_1 y λ_2 , son reales.

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

El movimiento correspondiente a esta solución es no vibratorio. El efecto de amortiguación

es tan fuerte que cuando el bloque se desplaza y queda libre, simplemente regresa a su posición original sin oscilar. Se dice que el sistema está sobreamortiguado.

Sistema críticamente amortiguado. Si $C = C_c$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{C_c}{2m} = -\omega_n$.

Esta situación se conoce como amortiguación crítica, puesto que representa una condición en la que C tiene el valor mínimo necesario para hacer que el sistema sea no vibratorio.

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

Sistema subamortiguado. Con mucha frecuencia $C < C_c$, en cuyo caso el sistema se conoce como subamortiguado. En este caso, las raíces λ_1 y λ_2 son números complejos.

$$x = D \left[e^{-\left(\frac{C}{m}\right)t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \right]$$

Donde D y ϕ son constantes, por lo general determinadas a partir de las condiciones iniciales del problema. La constante ω_d se llama **frecuencia natural amortiguada del sistema**. Su valor es;

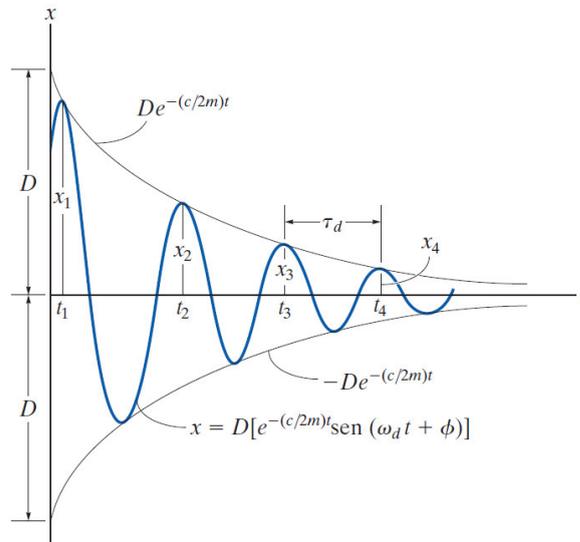
$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{C}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{C}{C_c}\right)^2}$$

donde la relación $\frac{C}{C_c}$ se llama **factor de amortiguación**.

Si utilizamos la frecuencia natural amortiguada ω_d , el periodo de vibración amortiguada puede escribirse como:

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Como $\omega_d < \omega_n$, el periodo de vibración amortiguada, τ_d , será mayor que el de vibración libre.



5. Vibración forzada viscosa amortiguada

El caso más general de movimiento vibratorio de un solo grado de libertad ocurre cuando el sistema incluye los efectos de movimiento forzado y amortiguación inducida.

Si se conecta un amortiguador a un bloque y a un resorte, la ecuación diferencial que describe el movimiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \text{sen} \omega_o t$$

Para un bloque y resorte que experimenten desplazamiento periódico de sus soportes puede escribirse una ecuación similar.

Por consiguiente, la solución particular será:

$$x_p = X' \text{sen}(\omega_o t - \phi')$$

Las constantes X' y ϕ' se determinan al calcular la primera y segunda derivadas.

$$-X'm\omega_o^2 \text{sen}(\omega_o t - \phi') + X'c\omega_o \cos(\omega_o t - \phi') + X'k \text{sen}(\omega_o t - \phi') = F_o \text{sen} \omega_o t$$

Como esta ecuación es válida todo el tiempo, los coeficientes constantes se obtienen con

$\omega_o t - \phi' = 0$, y $\omega_o t - \phi' = \frac{\pi}{2}$, lo que hace que la ecuación anterior se escriba como:

$$X'c\omega_o^2 = F_o \text{sen} \phi'$$

$$X'm\omega_o^2 + X'k = F_o \cos \phi'$$

La amplitud se obtiene al elevar al cuadrado estas ecuaciones, sumar los resultados y utilizar la identidad $\text{sen}^2 \phi' + \cos^2 \phi' = 1$, lo cual da:

$$X' = \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\omega_o^2)^2 + c^2\omega_o^2}}$$

Si dividimos las ecuaciones entre la segunda obtenemos:

$$\phi' = \arctan\left(\frac{c\omega_o}{k - m\omega_o^2}\right)$$

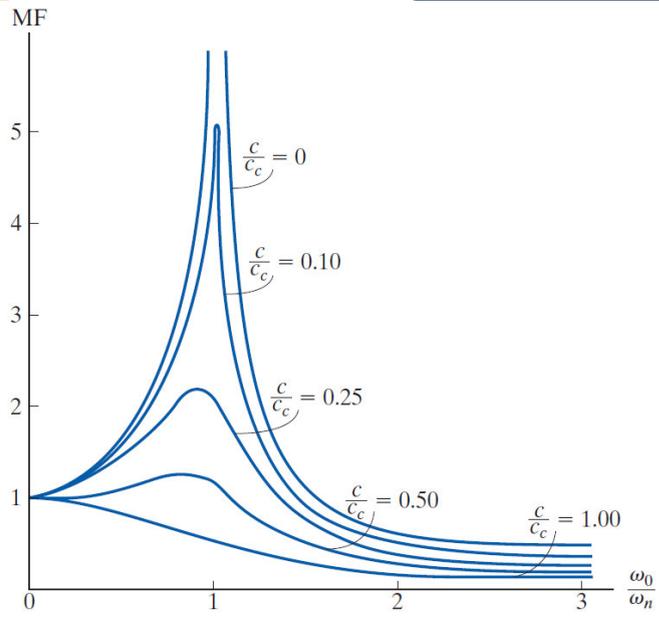
Como $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $c_c = 2m\omega_n$, entonces las ecuaciones anteriores también pueden escribirse como:

$$X' = \frac{\frac{F_o}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

$$\phi' = \arctan\left[\frac{2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

El factor de amplificación MF

$$MF = \frac{X'}{\frac{F_o}{k}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 17

Tema: Vibraciones mecánicas

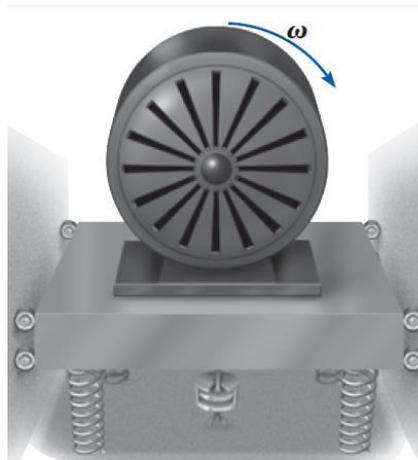
Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2016 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

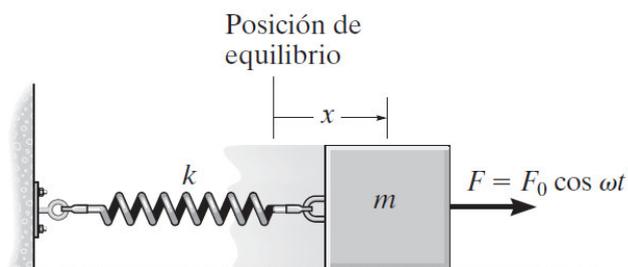
INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. Un motor eléctrico de 30 kg está sostenido por cuatro resortes, como se muestra en la figura; cada uno con una rigidez de 200 N/m . Si el rotor se desbalancea de modo que su efecto equivalga a una masa de 4 kg situada a 60 mm del eje de rotación, determine la amplitud de la vibración cuando el rotor gira a $\omega_o = 10 \text{ rad/s}$. El factor de amortiguación es

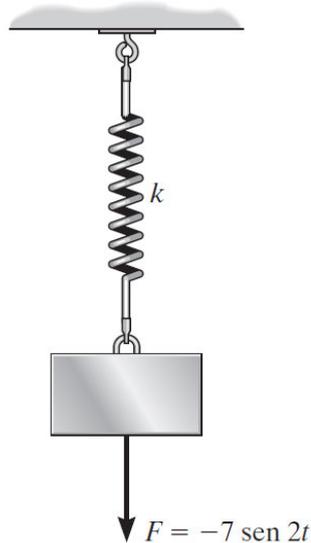
$$\frac{c}{c_c} = 0.15.$$



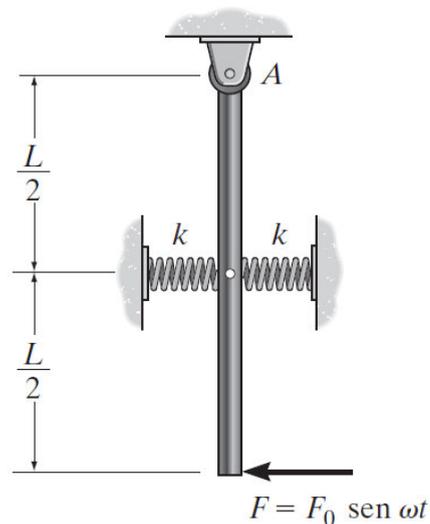
2. Si el modelo de bloque y resorte se somete a la fuerza periódica $F = F_o \cos \omega t$, demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es $\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \left(\frac{F_o}{m}\right)\cos \omega t$, donde x se mide con respecto a la posición de equilibrio del bloque. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?



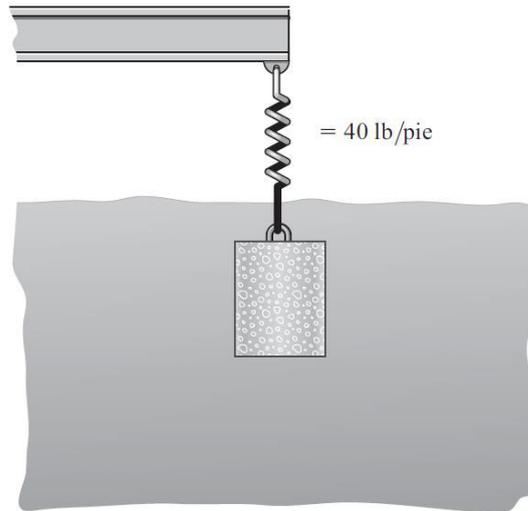
3. El resorte que se muestra se alarga 6 cm cuando se carga con un peso de 50 N . Determine la ecuación que describe la posición del peso como una función del tiempo si el peso es jalado 4 cm por debajo de su posición de equilibrio y se libra del reposo cuando $t = 0$. El peso se somete a la fuerza periódica $F = (-7\text{ sen}2t)\text{ N}$, donde t está en segundos.



4. La barra uniforme tiene una masa de m . Si en ella actúa una fuerza periódica $F = F_0 \text{ sen } \omega t$, determine la amplitud de la vibración de estado continuo.



5. El bloque, con un peso de 15 lb , se sumerge en un líquido de modo que la fuerza de amortiguación que actúa en el bloque tenga una magnitud de $F = 0.8v\text{ lb}$, donde v es la velocidad del bloque en pies/s. Si el bloque es jalado hacia abajo 0.8 pies y se libra del reposo, determine su posición en función del tiempo. El resorte tiene una rigidez de $k = 40\text{ lb/pie}$. Considere que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos

ANEXOS

A. DERIVADAS E INTEGRALES.

Tabla A.1 Derivadas de algunas funciones.

Nota: Las letras a y n son constantes.

$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \operatorname{sen} ax$	$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{a}{x}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} \frac{x}{a} = \frac{\mp 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arctan} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc cot} \frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$
$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$

Tabla A.2 Algunas integrales indefinidas.

Nota: Las letras a , b , c y n son constantes.

Una constante arbitraria se debe sumar a cada una de estas integrales.

$\int dx = x$	$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a}$
$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{x}{a}$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$	$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$	$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax)$
$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$	$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax)$
$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx})$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, a^2-x^2 > 0$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$
$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$	$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$	$\int \arcsin ax dx = x \arcsin ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$
$\int x \sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2-x^2)^{3/2}$	$\int \arccos ax dx = x \arccos ax - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$

B. CANTIDADES Y UNIDADES

Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	...	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	...	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	...	rad/s
Área	Metro cuadrado	...	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	...	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	...	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	†
Masa	Kilogramo	kg	†
Momento de una fuerza	Newton-metro	...	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	†
Velocidad	Metro por segundo	...	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	...	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3} m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

†Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).

†Unidad básica.

C. MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Repaso de geometría y trigonometría

Los ángulos θ en la figura A-1 son iguales entre la línea transversal y las dos líneas paralelas.

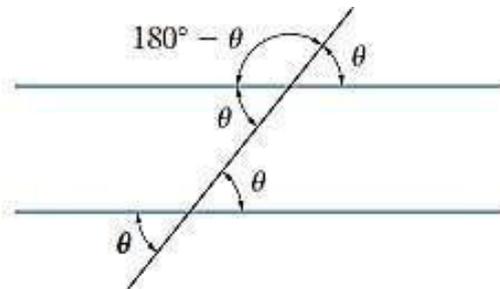
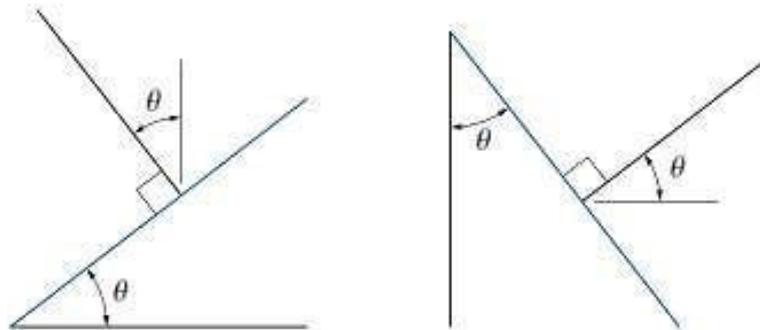


Fig. A-1

Para una línea y su normal, los ángulos θ de la figura A-2 son iguales.



Para el círculo de la figura A-3, $s = \theta r$, de manera que cuando $\theta = 360^\circ = 2\pi$ rad entonces la circunferencia es $s = 2\pi r$. Además, como $180^\circ = \pi$ rad, entonces θ (rad) = $(\pi/180^\circ)\theta^\circ$. El área del círculo es $A = \pi r^2$.

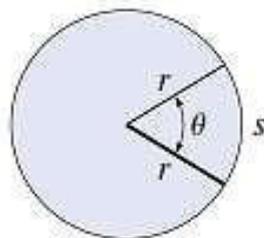


Fig. A-3

Los lados de un triángulo semejante se pueden obtener por proporción, como en la figura A-4, donde $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$.

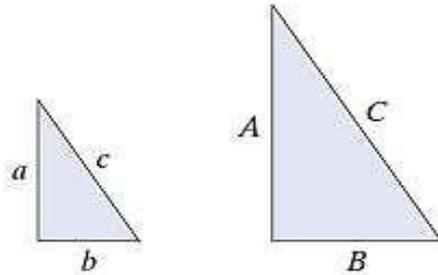


Fig. A-4

Para el triángulo rectángulo de la figura A-5, el teorema de Pitágoras es

$$h = \sqrt{(o)^2 + (a)^2}$$

Las funciones trigonométricas son

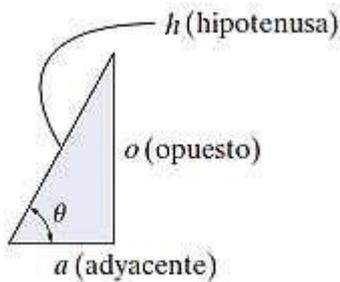


Fig. A-5

$$\text{sen } \theta = \frac{o}{h}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{a}{h}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{o}{a}$$

Lo anterior puede recordarse con facilidad como “soh, cah, toa”, es decir, el seno es el opuesto sobre la hipotenusa, etcétera. A partir de esto se obtienen las otras funciones trigonométricas.

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{h}{o}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta} = \frac{h}{a}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{1}{\text{tan } \theta} = \frac{a}{o}$$

Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi \pm \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{cos}(\theta \pm \phi) = \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi \mp \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{cos} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 2\theta}{2}}, \operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 2\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$$

Fórmula cuadrática

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BÁSICA

- Beer F., Johnston R., Eisenbenberg E., (2013). Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática. Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

COMPLEMENTARIA

- Hibbeler R. C. (2010). Ingeniería Mecánica. Estática. Décimo segunda edición. Pearson Educación de México, S.A. De C.V. México.
- Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). Mecánica para Ingenieros. Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté, S.A. España.
- Bedford A. y Fowler W. (1996). Mecánica para Ingenieros. Estática. Primera Edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.
- Riley W.F. y Sturges L.D. (1995). Ingeniería Mecánica. Estática. Primera edición. Editorial Reverté, S.A. España.
- Castillo Basurto J. L. (2006). Estática para Ingenieros y Arquitectos. Segunda Edición. Editorial Trillas, S.A. De C.V. México.
- Sandor B.I. Y Richter K.J. (1989). Ingeniería Mecánica. Estática. Segunda Edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México.

RECURSOS DIGITALES

BASES DE DATOS

- ProQuest - base de datos de información del mundo académico.
<http://formulario.continental.edu.pe/proquest/LoginForUser.as>

ENLACES DE INTERÉS

- Sistema de información científica REDALYC Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal.
<http://redalyc.uaemex.mx/>.