

Universidad
Continental



Mecánica vectorial - estática

Carlos Alberto Coaquira Rojo



Datos de Catalogación Bibliográfica

Mecánica vectorial - estática. Manual Autoformativo /
Carlos Alberto Coaquira Rojo - Huancayo:
Universidad Continental. 2017. - 154 p.

Datos de catalogación del CENDOC UC

Mecánica vectorial - estática. Manual Autoformativo

Autor Carlos Alberto Coaquira Rojo

Primera edición

Huancayo, abril de 2017

De esta edición

© Universidad Continental

Av. San Carlos 1980, Huancayo-Perú

Teléfono: (51 64) 481-430 anexo 7361

Correo electrónico: recursosucvirtual@continental.edu.pe

<http://www.continental.edu.pe/>

Versión e-book

Disponible en <http://repositorio.continental.edu.pe/>

ISBN electrónico N.º 978-612-4196-

Dirección: Emma Barrios Ipenza

Edición: Eliana Gallardo Echenique

Miguel Angel Cordova Solis

Asistente de edición: Andrid Poma Acevedo

Asesor didáctico: Fabio Contreras Oré

Corrección de textos: Sara Maricruz Bravo Montenegro

Diseño y diagramación: José María Miguel Jauregui Muñico

Todos los derechos reservados. Cada autor es responsable del contenido de su propio texto.

Este manual autoformativo no puede ser reproducido, total ni parcialmente, ni registrado en o transmitido por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia, o cualquier otro medio, sin el permiso previo de la Universidad Continental.



ÍNDICE

 Introducción	11
 Organización de la asignatura	13
 Resultado de aprendizaje:	13
 Unidades didácticas	13
 Tiempo mínimo de estudio	13
 U-I ESTÁTICA DE PARTÍCULAS	15
 Diagrama de presentación de la Unidad I	15
 Organización de los aprendizajes	15
 Tema N.º1 Fuerzas en el plano	17
1. Escalares y vectores	18
2. Vector	19
3. Producto de un escalar por un vector	20
4. Adición de vectores	21
5. Descomposición de un vector en sus componentes	22
6. Componentes rectangulares de un vector	22
7. Suma de un sistema de fuerzas coplanares	23
Actividad N.º 1	24
 Tema N.º2 Sistemas equivalentes de fuerzas, equilibrio de cuerpos rígidos, centroides y centros de gravedad	26
1. Primera ley de newton o ley de la inercia	26

2.	Condición para el equilibrio de una partícula en el plano	27
3.	Diagrama de cuerpo libre	27
4.	Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el plano	29
	Actividad N.º 2	30
	Tema N.º3 Fuerzas en el espacio	32
1.	Vectores cartesianos en el espacio	32
2.	Representación de un vector cartesiano en tres dimensiones	32
3.	Vector de posición	33
4.	Vector fuerza en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción:	34
5.	Suma de fuerzas concurrentes en el espacio	34
	Actividad N.º 3	35
	Tema N.º4 Equilibrio en el espacio	37
	Actividad N.º 4	39
	Lectura seleccionada N.º 1: BURJ KHALIFA	40
	Glosario de la Unidad I	41
	Bibliografía de la Unidad I	42
	Autoevaluación N.º 1	43
	EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS, CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD	47
	Diagrama de presentación de la Unidad II	47
	Organización de los aprendizajes	47

 Tema N.º1 Cuerpos rígidos. Momento de fuerza	49
1. Cuerpos rígidos y principio de transmisibilidad	49
2. Momento de una fuerza	50
3. Formulación escalar del momento de una fuerza con respecto a un punto	50
4. Formulación vectorial del momento de una fuerza respecto a un punto	51
5. Principio de momentos o teorema de Varignon	52
6. Momento de una fuerza con respecto a un eje	52
7. Momento de un par	53
7. Pares equivalentes	53
8. Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema equivalente de fuerza y momento par	54
Actividad N.º 1	55
 Tema N.º2 Equilibrio de cuerpos rígidos en el plano	57
1. Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido	57
2. Equilibrio en dos dimensiones	58
3. Equilibrio en elementos de dos y tres fuerzas	60
4. Procedimiento para el análisis del equilibrio de un cuerpo rígido en el plano	61
Actividad N.º 2	63
 Tema N.º3 Equilibrio de cuerpos rígidos en tres dimensiones	65
1. Equilibrio en tres dimensiones	65
2. Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el espacio	69
Actividad N.º 3	70

 Tema N.º4 Centroides y centro de gravedad	72
1. Introducción. Centro de gravedad y centroide de un cuerpo	72
2. Centros de gravedad y centroide en líneas, áreas y volúmenes	73
3. Fórmulas de centroides de formas comunes de áreas y de líneas.	75
4. Determinación de centroides por integración	76
5. Centro de gravedad de cuerpos compuestos	77
Actividad N.º 4	78
Lectura seleccionada N.º 2: El canal de Panamá	80
 Glosario de la Unidad II	80
 Bibliografía de la Unidad II	81
 Autoevaluación N.º 2	83
 U - III FUERZAS DISTRIBUIDAS, ANÁLISIS ESTRUCTURAL Y FRICCIÓN	87
 Diagrama de presentación de la Unidad III	87
 Organización de los aprendizajes	87
 Tema N.º1 Fuerzas distribuidas	88
1. Carga uniforme a lo largo de un solo eje. Cargas en vigas	89
2. Fuerzas sobre superficies sumergidas	90
Actividad N.º 1	91
 Tema N.º2 Análisis estructural de armaduras	93
1. Armaduras simples	94
2. Fuerzas en una armadura	95
3. Análisis de armaduras mediante el método de nudos:	95
4. Análisis de armaduras mediante el método de secciones	96

Actividad N.º 2	97
Lectura seleccionada N.º 4: El puente de la bahía de sidney	98
 Tema N.º3 Análisis estructural, armazones y máquinas	99
1. Análisis de un armazón	99
2. Procedimiento para determinar las fuerzas en los elementos de un bastidor	99
Actividad N.º 3	101
 Tema N.º4 Fricción	103
1. Análisis de la fricción seca	103
2. Coeficientes de fricción	105
3. Ángulo de fricción	107
Actividad N.º 4	109
Lectura seleccionada N.º 3. La monumental represa china	111
 Glosario de la Unidad III	112
 Bibliografía de la Unidad III	113
 Autoevaluación N.º 3	114
 U-IV FUERZAS EN VIGAS Y CABLES, MOMENTO DE INERCIA Y MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL	117
 Diagrama de presentación de la Unidad IV	117
 Organización de los aprendizajes	117
 Tema N.º1 Fuerzas en vigas	118
1. Viga	118
2. Fuerzas y momentos internos en una viga	119

3.	Procedimiento para determinar las fuerzas y momentos internos en una sección transversal particular de una viga	120
4.	Diagramas de fuerza cortante y momento flector	120
5.	Procedimiento para analizar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga y graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector:	121
6.	Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flector	121
Actividad N.º 1		122
	Tema N.º2 Fuerzas en cables	124
1.	Cables con carga concentrada	124
2.	Cargas uniformemente distribuidas a lo largo de una línea horizontal	126
3.	Cargas uniformemente distribuidas en el cable	127
Actividad N.º 2		129
	Tema N.º3 Momento de inercia	131
1.	Momentos de inercia de un área	131
2.	Momento de inercia polar	132
3.	Radio de giro de un área	132
4.	Teorema de los ejes paralelos para un área:	132
5.	Momentos de inercia de áreas compuestas	133
Actividad N.º 3		136
	Tema N.º4 Método del trabajo virtual	138
1.	Trabajo virtual	138
2.	Principio del trabajo virtual	139
3.	Aplicación a estructuras	142

Actividad N.º 4	144
Lectura seleccionada N.º 4: El puente golden gate de san francisco	145
 Glosario de la Unidad VI	146
 Bibliografía de la Unidad IV	147
 Autoevaluación N.º 4	148
 Anexo	151





Mecánica Vectorial-Estática es una asignatura teórico-práctica, diseñada para la modalidad a distancia que pretende proporcionar al estudiante la información básica sobre las leyes y principios de la estática. Esta ciencia resulta importante en la formación académica del estudiante de Ingeniería dado el acelerado avance tecnológico en todas las ramas del conocimiento que ha dado luces a nuevas aplicaciones para el bienestar de la sociedad. La elaboración del presente manual es fruto de la investigación y reformulación de temas que han sido enriquecidos a partir de la revisión y contrastación de diversas fuentes del conocimiento, entre ellos los textos universitarios de mayor connotación mundial. Asimismo, la experiencia docente ha permitido percibir la importancia del aprendizaje de esta asignatura, pues trasciende en el estudio de diversas asignaturas posteriores en sus planes académicos, aportando una base sólida e imprescindible de conocimiento.

En general, los contenidos propuestos en el manual autoformativo, se dividen en cuatro unidades: la primera unidad trata sobre la estática de partículas y cuerpos rígidos; la segunda unidad, sobre el estudio de los sistemas equivalentes de fuerzas, equilibrio de cuerpos rígidos, centroides y centros de gravedad; a continuación, la tercera unidad, sobre las fuerzas distribuidas, análisis de estructuras y fricción; y, por último, la cuarta unidad, sobre las fuerzas en vigas y cables, momentos de inercia y método del trabajo virtual. En el estudio de la asignatura resulta fundamental en principio la adecuada comprensión de los vectores, seguida de la aplicación correcta de las condiciones de equilibrio dadas por las fuerzas y momentos de fuerza; luego, en las dos últimas unidades se tendrán aplicaciones de los conceptos indicados.

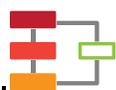
Es recomendable que desarrolle una permanente lectura de estudio, de los contenidos desarrollados y de los textos seleccionados que amplían o profundizan el tratamiento de la información junto a la elaboración de resúmenes y una minuciosa investigación vía Internet. El desarrollo del manual se complementa con autoevaluaciones, que son una preparación para la prueba final de la asignatura.

Se recomienda que el estudiante implemente un hábito permanente de estudio con la revisión permanente de la teoría. Asimismo, que sea minucioso en la investigación, a fin de consolidar el aprendizaje. El contenido del manual se complementará con las clases por videoconferencia y el uso continuo del aula virtual de la Universidad, de los foros de consulta y revisión de las diapositivas animadas, con el fin de desarrollar la asignatura en forma más detallada y amplia. Se sugiere la siguiente secuencia de estudio para cada unidad: 1.º Realizar el estudio de los contenidos en forma analítica y reflexiva, resumiendo y asimilando la información. 2.º Revisar las lecturas seleccionadas, que representan una ampliación y actualización científico-tecnológica. 3.º Desarrolla las actividades programadas para cada semana en el aula virtual. 4.º Re-suelve la autoevaluación, que es una preparación para la prueba final de la asignatura.

Organice su tiempo, esa es la clave para lograr el éxito. Los buenos resultados son la consecuencia de optimizar el uso del tiempo en las diversas actividades que asume como estudiante. El estudio a distancia requiere perseverancia y disciplina, por lo tanto, su motivación de ser mejor cada día será determinante para el logro de su aprendizaje del curso Mecánica Vectorial – Estática.

El Autor





ORGANIZACIÓN DE LA ASIGNATURA



Resultado de aprendizaje:

Al término de la asignatura el estudiante será capaz de aplicar los principios y leyes de la estática en el análisis de partículas y cuerpos rígidos en condición de equilibrio para la determinación de fuerzas en estructuras y en el análisis de las fuerzas en vigas y cables, logrando como resultado aplicaciones diversas en el campo de la ingeniería.



Unidades didácticas

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
Estática de partículas	Equilibrio de cuerpos rígidos, centroides y centros de gravedad	Fuerzas distribuidas, análisis de estructuras y fricción	Fuerzas en vigas y cables, momentos de inercia y método del trabajo virtual
Resultado de aprendizaje	Resultado de aprendizaje	Resultado de aprendizaje	Resultado de aprendizaje
Al finalizar la unidad, el estudiante reconoce la teoría básica del álgebra vectorial y conceptos básicos de la mecánica vectorial, como determinación de la resultante de fuerzas, para re-solver problemas de equilibrio de una partícula.	Al finalizar la unidad, el estudiante comprende sistemas de fuerzas equivalentes; además aplica las ecuaciones de equilibrio estático del cuerpo rígido mediante modelos matemáticos. Asimismo, determina con exactitud los centroides y centros de gravedad de cuerpos arbitrarios.	Al finalizar la unidad, el estudiante determina la magnitud y punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas distribuidas; asimismo, aplica las ecuaciones de equilibrio estático del cuerpo rígido a estructuras. Además, analiza las características de la fuerza de fricción, con precisión.	Al finalizar la unidad, el estudiante aplica las ecuaciones de equilibrio para determinar las acciones internas en una sección de viga y traza los diagramas de variación. Además, discrimina cables a diferentes cargas. Asimismo, determina los momentos de inercia. Finalmente, aplica el método del trabajo virtual para analizar fuerzas en un cuerpo rígido.



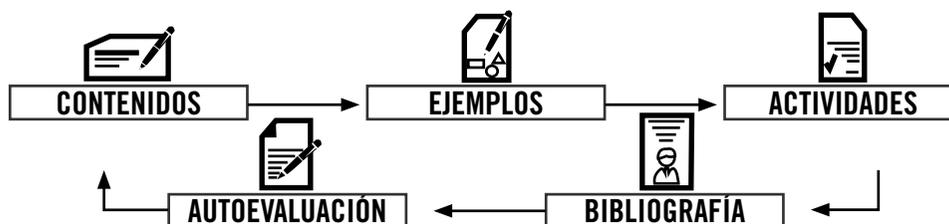
Tiempo mínimo de estudio

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
1ra. semana y 2da. semana	3ra. semana y 4ta. semana	5ta. semana y 6ta. semana	7ma. semana y 8va. semana
16 horas	16 horas	16 horas	16 horas



UNIDAD I ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD I



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Resultados de aprendizaje de la Unidad I: Al finalizar la unidad, el estudiante reconoce la teoría básica del álgebra vectorial y conceptos básicos de la mecánica vectorial, como determinación de la resultante de fuerzas, para resolver problemas de equilibrio de partícula.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p>Tema N.º 1: Fuerzas en el plano</p> <ol style="list-style-type: none"> Escalares y vectores Vectores Adición o suma de vectores Producto de un escalar por un vector Componentes de un vector fuerza Componentes rectangulares de una fuerza <p>Tema N.º 2: Equilibrio de una partícula en el plano</p> <ol style="list-style-type: none"> Equilibrio de una partícula en el plano Primera ley de Newton o ley de la inercia Diagrama de cuerpo libre <p>Tema N.º 3: Fuerzas en el espacio</p> <ol style="list-style-type: none"> Vector en el espacio. Fuerzas en el espacio Vector de posición Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción Adición de fuerzas concurrentes en el espacio <p>Tema N.º 4: Equilibrio de una partícula en el espacio</p> <ol style="list-style-type: none"> Condición de equilibrio de una partícula en el espacio. Diagrama de cuerpo libre. 	<ol style="list-style-type: none"> Determina gráfica y analíticamente la suma de dos vectores fuerza. Calcula la fuerza resultante, en magnitud y dirección, de un sistema de vectores fuerza en dos dimensiones. <p>Actividad N.º 1</p> <ol style="list-style-type: none"> Resuelve ejercicios y problemas de fuerzas en el plano. Utiliza modelos sencillos de representación de fuerzas y que participan en el equilibrio de partículas en dos dimensiones. Aplica las condiciones de equilibrio en el análisis de una partícula en dos dimensiones. <p>Actividad N.º 2</p> <ol style="list-style-type: none"> Resuelve ejercicios y problemas sobre equilibrio de una partícula en un plano. Determina la expresión cartesiana de la adición de fuerzas concurrentes en el espacio. <p>Actividad N.º 3</p> <ol style="list-style-type: none"> Elabora un diagrama de flujo para representar el algoritmo de equilibrio en el plano y en el espacio. Además, desarrollar los ejercicios propuestos. Aplica las condiciones de equilibrio en el análisis de una partícula en tres dimensiones. <p>Actividad N.º 4</p>	<ol style="list-style-type: none"> Valora la importancia de conocer la naturaleza de las fuerzas, la cual relaciona a la realidad y aplicación en el campo de la ingeniería. Participa y dialoga sobre nuevos conocimientos y aplicaciones del equilibrio en situaciones desde cotidianas hasta tecnológicas. Reconoce y comprende un problema, diseña e implementa un proceso de solución y evalúa su impacto.

Lectura seleccionada 1:

Burj Khalifa.

Autoevaluación de la Unidad I

Desarrolla los ejercicios propuestos.

Control de lectura N.º 1:

Se aplicará una prueba de selección múltiple de los temas n.º 1; 2; 3 y 4.

Fuerzas en el plano

Tema N.º1

Para iniciar el presente tema, se tiene presente que la mecánica es una rama de las ciencias físicas que estudia en sí el estado de reposo o movimiento de los cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, esta materia puede dividirse a su vez en tres ramas: mecánica de cuerpos rígidos, mecánica de cuerpos deformables y mecánica de fluidos; sin embargo, la clasificación de la mecánica es mucho más amplia.

En este material estudiaremos la mecánica de cuerpos rígidos, la misma que es un requisito básico para el estudio de las otras ramas de la mecánica. Esta clase de mecánica es esencial para el diseño y el análisis de muchos tipos de elementos estructurales, componentes mecánicos, mecanismos diversos, o dispositivos electrónicos que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería.

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: estática y dinámica.

Estática: Estudia el equilibrio de los cuerpos, cuerpos en reposo o a velocidad constante.

Dinámica: Estudia el movimiento acelerado de los cuerpos.

Cantidades básicas: Son las siguientes cuatro: (Hibbeler, 2013, p. 22)

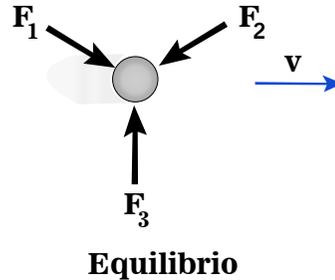
- Longitud: Usada para describir la posición de un punto en el espacio y describir el tamaño de un sistema físico. Define distancias y propiedades geométricas.
- Tiempo: El tiempo se concibe como una secuencia de eventos.
- Masa: Es una medición de una cantidad de materia usada para comparar la acción de un cuerpo con la de otro.
- Fuerza: Es la acción ejercida de un cuerpo sobre otro. La interacción puede darse por contacto físico o entre cuerpos separados como las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por completo con su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.

Idealizaciones importantes:

- Partícula: Es el modelo matemático de un cuerpo y se representa como un punto. Se considera la masa del cuerpo, pero no sus dimensiones.
- Cuerpo rígido: Es una combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí, tal que las propiedades del material no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo.
- Fuerza concentrada: Una fuerza concentrada representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo de esta fuerza sería la fuerza de contacto entre una rueda y el suelo.
- Principios fundamentales: Basados en la evidencia experimental, permiten cimentar el estudio de la mecánica y estos son seis (Hibbeler, 2013, p. 23):
- Principio de transmisibilidad: En toda la línea de acción de una fuerza, su efecto externo

ejercido sobre un cuerpo rígido es invariable.

- Primera ley de Newton: Una partícula originalmente en reposo, o que se mueve en línea recta con velocidad constante, tiende a permanecer en este estado siempre que la partícula no se someta a una fuerza no balanceada.



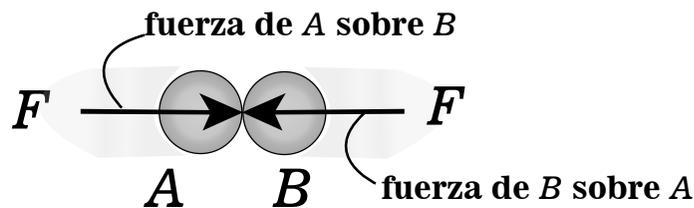
- Segunda ley de Newton. Una partícula sobre la que actúa una fuerza no balanceada \mathbf{F} experimenta una aceleración \mathbf{a} que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud directamente proporcional a la fuerza.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



Movimiento acelerado

- Tercera ley de Newton: Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.



Acción - reacción

- Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas: Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una fuerza llamada resultante.
- Ley de gravitación de Newton: Propone que dos partículas cualesquiera o cuerpos tienen una fuerza de atracción (gravitacional) que actúa entre ellos. Sin embargo, en el caso de una partícula localizada en la superficie de la Tierra, o cerca de ella, la única fuerza gravitacional que tiene alguna magnitud significativa es la que existe entre la Tierra y la partícula. En consecuencia, esta fuerza, conocida como "peso", será la única fuerza gravitacional que se considere en nuestro estudio de la mecánica.

1. Escalares y vectores

Las cantidades físicas en ingeniería se definen mediante escalares y vectores.

Cantidad escalar:

Un escalar es cualquier cantidad física que se puede especificar por completo mediante su magnitud o módulo. La longitud, la masa, la energía y el volumen son ejemplos de cantidades escalares.

- Masa de un cargador frontal:

$$4000 \text{ kg}$$

Número unidad

- Temperatura de conservación de un alimento:

$$- 40 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Número unidad

Cantidad vectorial:

Un vector es cualquier cantidad física que requiere tanto de magnitud como de dirección y sentido para su descripción completa. La fuerza, el desplazamiento, la velocidad y el impulso son ejemplos de cantidades vectoriales.

$$\text{Peso de un cargador frontal: } - 40000 \hat{j} \text{ N}$$

$$- \quad 40000 \quad \hat{j} \quad \text{N}$$

Sentido Número Dirección Unidad

2. Vector

Los vectores son entes matemáticos cuya determinación exige el conocimiento de una magnitud, una dirección y un sentido.

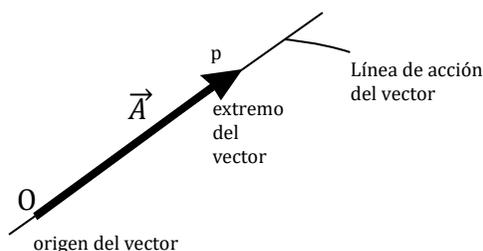
✓ Gráficamente un vector se representa por un segmento de recta orientado.

✓ Análíticamente se representa por una letra con una flecha encima.

$$\vec{A} = \text{Vector}$$

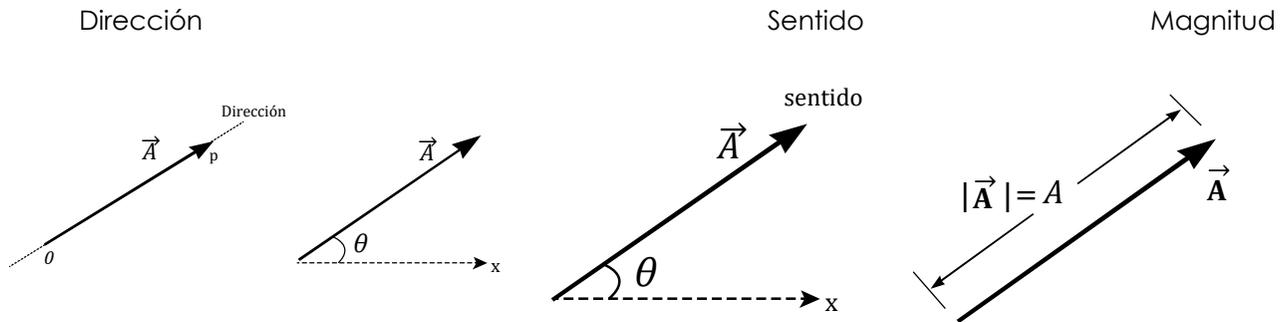
$$|\vec{A}| = A = \text{Magnitud del vector } \vec{A}$$

Elementos de un vector:



✓ Dirección: Gráficamente viene representada por la recta soporte o línea de acción. Representada en el plano por un ángulo de referencia.

- ✓ Sentido: Es el elemento que indica la orientación del vector, representada por la cabeza de flecha.
- ✓ Magnitud: Representa el valor numérico de la cantidad física a la cual se asocia la longitud del segmento de recta.



Ejemplo de vector fuerza:

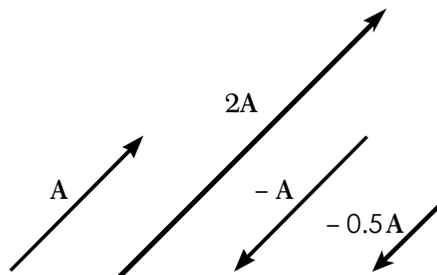
Observa un vector fuerza. Este representa gráficamente la fuerza que se aplica sobre el automóvil. Reconoce sus elementos.



- MAGNITUD: 100 N
- DIRECCIÓN: *Horizontal*
- SENTIDO: *Hacia la derecha*

3. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

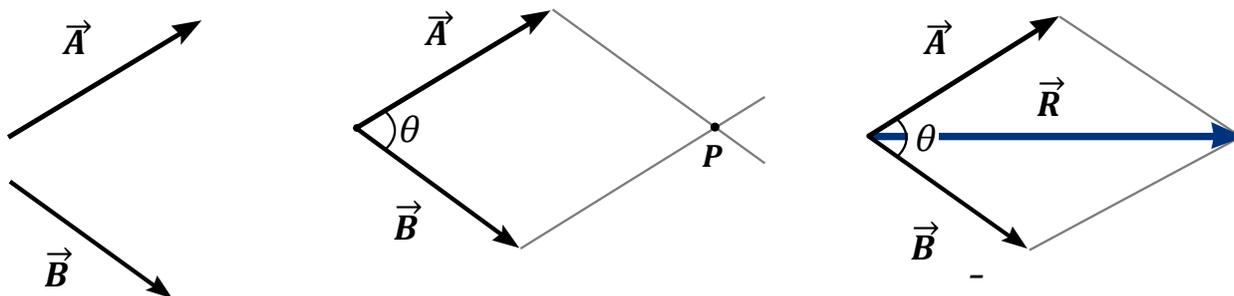
Si un vector se multiplica por un escalar positivo, su magnitud se incrementa en esa cantidad. (Beer et al. 2013, p. 35). Cuando se multiplica por un escalar negativo, su magnitud se incrementa en esa cantidad y también cambia el sentido de la dirección del vector. En la figura se muestran ejemplos gráficos de estas operaciones.



4. ADICIÓN DE VECTORES

Todas las cantidades vectoriales obedecen la ley del paralelogramo para la suma. A manera de ilustración, los dos vectores \vec{A} y \vec{B} de la figura adjunta aplicados en un punto se suman para formar un vector "resultante" \vec{R} aplicado en el mismo punto.

1. Los vectores sumandos a manera de lados forman un paralelogramo.
2. Sobre la diagonal del paralelogramo, partiendo del mismo punto, se traza el vector resultante o suma.



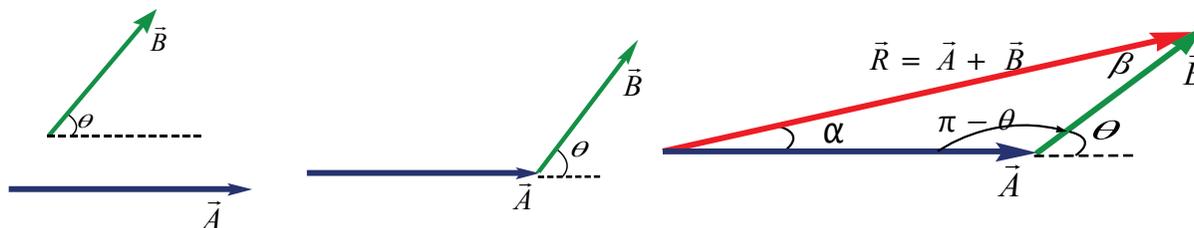
Se cumple la suma vectorial:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

Para determinar el módulo (magnitud) del vector suma podemos usar la ley de cosenos:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

Asimismo, podemos sumar los vectores \vec{A} y \vec{B} con el método del triángulo. Para ello, se grafica un vector a continuación del otro y se traza la resultante uniendo el origen del trazo con el extremo libre del segundo vector.

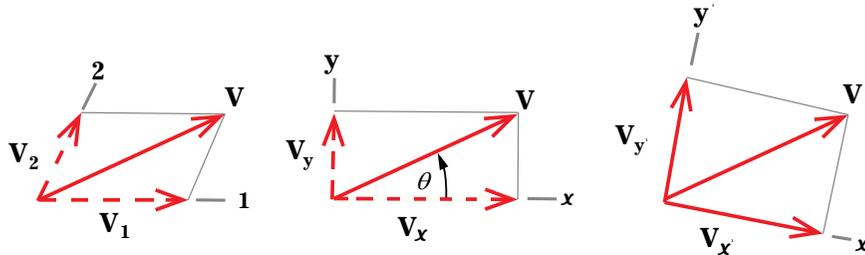


Para relacionar las magnitudes de los vectores usamos la ley de senos:

$$\frac{|\vec{R}|}{\text{sen}(\pi - \theta)} = \frac{|\vec{A}|}{\text{sen} \beta} = \frac{|\vec{B}|}{\text{sen} \alpha}$$

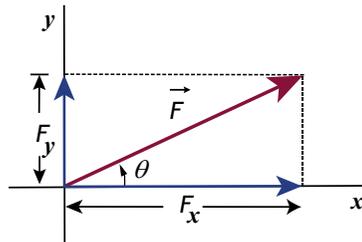
5. DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN SUS COMPONENTES

Dado un vector \mathbf{V} que actúa sobre una partícula, puede ser reemplazado por dos vectores que en conjunto produzcan el mismo efecto sobre la partícula. Estos vectores se denominan componentes del vector original \mathbf{V} y al proceso de sustituirlos en lugar de \mathbf{V} se le llama "descomposición del vector \mathbf{V} en sus componentes".



6. COMPONENTES RECTANGULARES DE UN VECTOR

En muchos problemas será conveniente descomponer el vector \vec{F} en sus componentes perpendiculares entre sí. Luego, el vector puede representarse como la suma de dos vectores que se encuentran sobre los ejes x e y respectivamente. Estos vectores reciben el nombre de componentes rectangulares del vector \vec{F} .

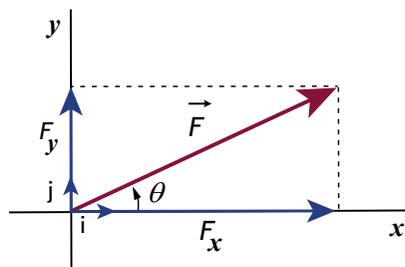


- ✓ F_x es la componente (proyección) del vector F en el eje x .
- ✓ F_y es la componente (proyección) del vector F en el eje y .

Se cumple:

$$F_x = F \cos\theta \quad F_y = F \sin\theta \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

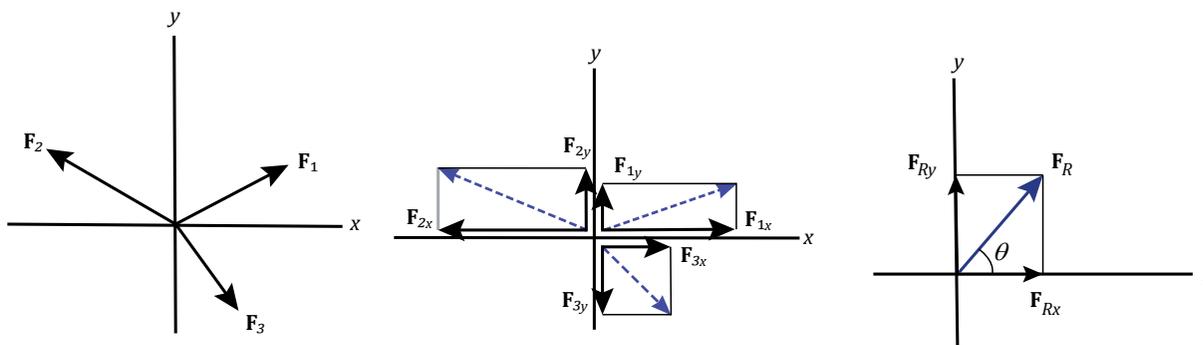
Podemos usar vectores unitarios, vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes x e y , representados por \hat{i} y \hat{j} , respectivamente. Luego, el vector F y sus componentes se escriben así.



$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

7. SUMA DE UN SISTEMA DE FUERZAS COPLANARES

Dado un conjunto de fuerzas coplanares, se puede obtener una solución analítica para obtener la fuerza resultante. Esto se realiza mediante la descomposición de cada fuerza en sus componentes rectangulares.



Luego, la suma de fuerzas está dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\
 &= F_{1x} \mathbf{i} + F_{1y} \mathbf{j} - F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} + F_{3x} \mathbf{i} - F_{3y} \mathbf{j} \\
 &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}) \mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}) \mathbf{j} \\
 &= (F_{Rx}) \mathbf{i} + (F_{Ry}) \mathbf{j}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 F_{Rx} &= \Sigma F_x \\
 F_{Ry} &= \Sigma F_y
 \end{aligned}$$

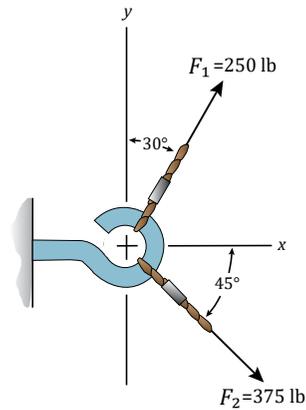
La magnitud y dirección de la fuerza resultante están dadas por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \\
 \theta &= \arctan \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|
 \end{aligned}$$

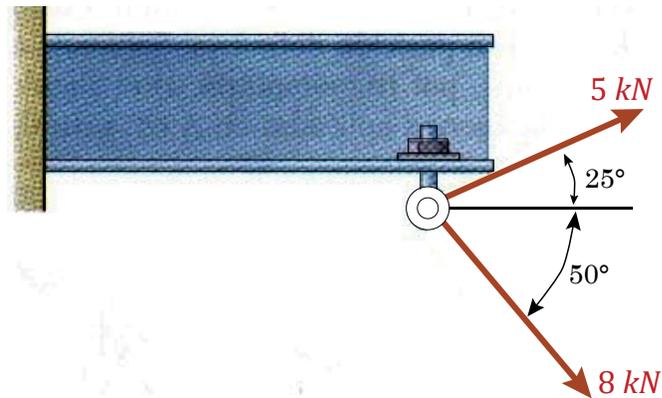
Actividad N.º 1

Resuelve ejercicios y problemas de fuerzas en el plano.

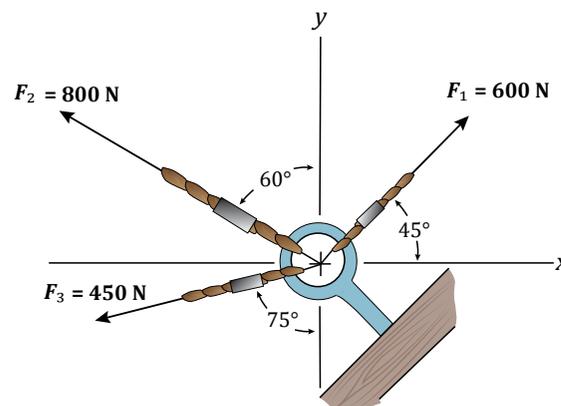
- Determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante.



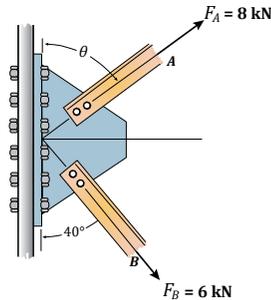
- Dos fuerzas son aplicadas a una armella sujeta a una viga. Determine la magnitud y la dirección de su resultante.



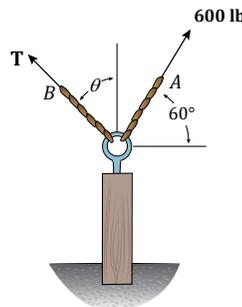
- Determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante



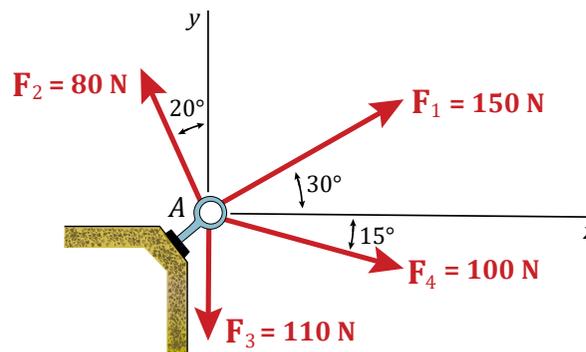
4. Determine el ángulo θ para conectar la barra OA a la placa, de manera que las fuerzas resultantes F_A y F_B estén dirigidas horizontalmente hacia la derecha. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante?



5. El poste va a ser extraído del terreno usando dos cuerdas A y B. La cuerda A estará sometida a 600 lb. Si la fuerza resultante que actuará sobre el poste va a ser de 1200 lb, vertical hacia arriba, determine la fuerza T en la cuerda B y el correspondiente ángulo que forma con el eje y.



6. Cuatro fuerzas actúan sobre un perno A como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). Mecánica para ingeniería: Estática. (3.a ed.). México : Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). Mecánica vectorial para ingenieros: Estática. (10.a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). Mecánica para ingenieros. Estática. (12.a ed.). México : Pearson Educación.

Sistemas equivalentes de fuerzas, equilibrio de cuerpos rígidos, centroides y centros de gravedad

Tema N.º2



Figura 1. Un equilibrista caminará sobre las cataratas del Niágara.

Disponible en <http://bit.ly/29618R4>

El equilibrio representa sin duda la situación de existencia de la materia en su forma más habitual. Estamos rodeados de situaciones de cuerpo que se encuentran en equilibrio, tanto de situaciones cotidianas como construcciones simples hasta situaciones de aplicación tecnológica. El primer caso de equilibrio es el de cuerpos en reposo, el cual es evidente, puesto que el cuerpo está con velocidad nula para un observador dado; el segundo caso de equilibrio es aquel en el cual los cuerpos tienen movimiento con velocidad uniforme, es decir, en línea recta. Veremos a continuación la ley y la condición necesarias para el equilibrio, así como los diagramas y cálculos pertinentes para su verificación.

1. PRIMERA LEY DE NEWTON O LEY DE LA INERCIA

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue: "Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento)" (Bedford, 2010, p. 52).



2. CONDICIÓN PARA EL EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

Una partícula está en equilibrio si permanece en reposo y en un principio estaba en reposo, o si tiene una velocidad constante y originalmente estaba en movimiento. No obstante, más a menudo, el término "equilibrio" o, de manera más específica, "equilibrio estático" se usa para describir un objeto en reposo.

Para mantener el equilibrio, es necesario satisfacer la primera ley del movimiento de Newton, la cual requiere que la fuerza resultante que actúa sobre una partícula sea igual a cero. Esta condición puede ser establecida matemáticamente como:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Para un cuerpo en equilibrio en dos dimensiones:

$$\sum F = (\sum F_x)\hat{i} + (\sum F_y)\hat{j} = 0$$

Ecuación que se cumple si se verifica que:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

3. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Para aplicar la ecuación de equilibrio, debemos tomar en cuenta todas las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan sobre la partícula. La mejor manera de hacer esto es pensar en la partícula como aislada y libre de su entorno. Un dibujo que muestra la partícula junto con todas las fuerzas que actúan sobre ella se denomina "diagrama de cuerpo libre" (DCL).

Entre las fuerzas más comunes para analizar el equilibrio de partículas tenemos:

- a. Fuerza gravitacional: Debida a la interacción con el planeta, se representa por un vector dirigido hacia abajo. A su magnitud se le denomina comúnmente peso (W). La magnitud del peso de un cuerpo se relaciona con su masa así:

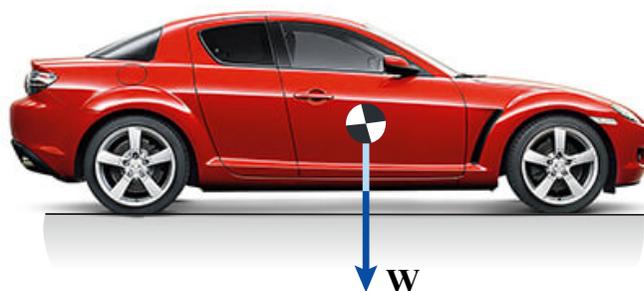
$$W = mg$$

Unidades en el SI:

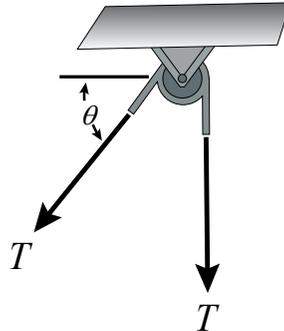
W = Peso (en newton)

m = Masa (en kilogramos)

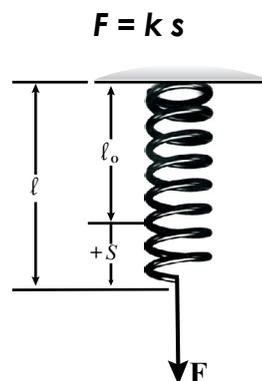
g = Aceleración de la gravedad = 9.81 m/s^2



- b. Fuerzas en cables y poleas: Para partículas supondremos que todos los cables (o cuerdas) tienen un peso insignificante y que no se pueden deformar. Además, un cable puede soportar solo una tensión o fuerza de "jalón" que actúa en la dirección del cable. La fuerza de tensión desarrollada en un cable continuo que pasa sobre una polea sin fricción debe tener una magnitud constante para mantener al cable en equilibrio. En la figura, el cable se somete a una tensión T en toda su longitud.



- c. Fuerzas en resortes: Si un resorte elástico lineal (o cuerda) de longitud no deformada lo se usa como soporte de una partícula, su longitud cambiará en proporción directa a la fuerza F que actúe sobre él (figura adjunta). Una característica que define la elasticidad de un resorte es la constante de resorte o rigidez k . La magnitud de la fuerza ejercida en un resorte elástico lineal que tiene una rigidez k y está deformado (alargado o acortado) una distancia igual a $s = \ell - \ell_0$, medida desde su posición sin carga, es

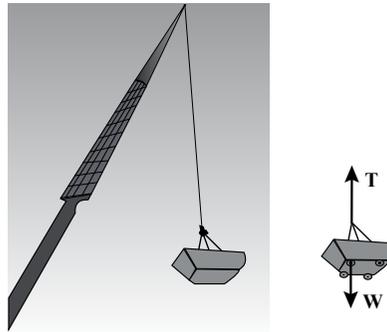


Procedimiento para trazar el DCL de una partícula:

1. Trace un perfil delineado. Imagine que la partícula está aislada o liberada de su entorno al trazar su perfil delineado.
2. Muestre todas las fuerzas. Indique sobre este bosquejo todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Estas pueden ser fuerzas activas, que tienden a poner la partícula en movimiento, o fuerzas reactivas, que son el resultado de las restricciones o soportes que tienden a evitar el movimiento.
3. Identifique cada una de las fuerzas. Las fuerzas que son conocidas deben ser marcadas con sus propias magnitudes y direcciones. Para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas desconocidas se usan letras.

Ejemplo de DCL: La cubeta se mantiene en equilibrio mediante el cable e intuitivamente sabemos que la fuerza en el cable debe ser igual al peso de la cubeta. Al trazar un diagrama de

cuerpo libre de la cubeta podemos entender por qué esto es así. Este diagrama muestra que solo hay dos fuerzas que actúan sobre la cubeta, a saber: su peso W y la fuerza T del cable.



4. PROCEDIMIENTO PARA EL ANÁLISIS DEL EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

1. Realice el diagrama de cuerpo libre, para ello:

- ✓ Establezca los ejes x e y en cualquier orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas.
- ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.

2. Aplique las ecuaciones de equilibrio:

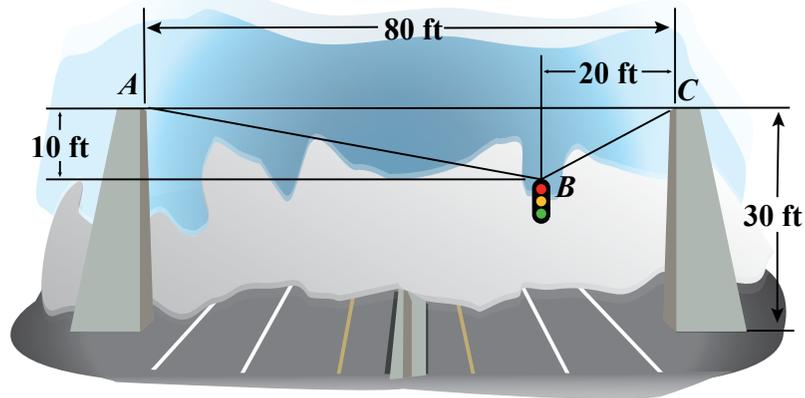
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo.
- ✓ Como la magnitud de una fuerza siempre es una cantidad positiva, si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

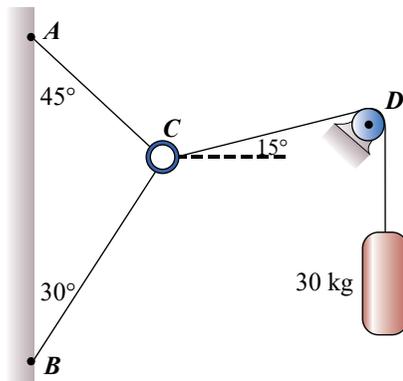
Actividad N.º 2

Resuelva ejercicios y problemas sobre equilibrio de una partícula. Establezca las ecuaciones de equilibrio y describa modelos sencillos de los diversos tipos de soportes utilizados en ingeniería.

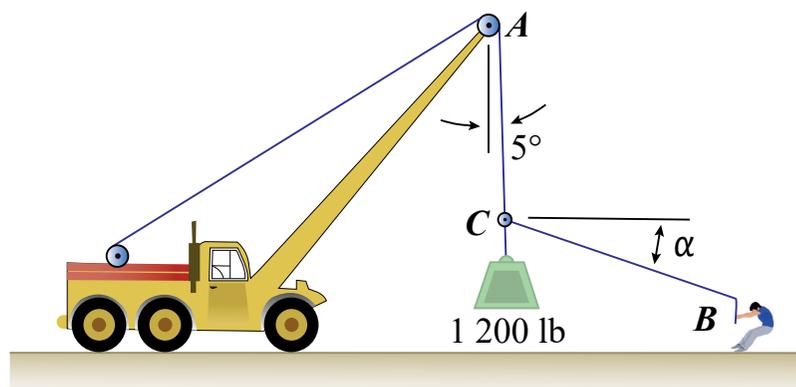
1. Un ingeniero de tráfico quiere suspender un semáforo 200 libras por encima del centro del carril derecho de los dos carriles de una carretera de cuatro carriles como se muestra. Determine las tensiones en los cables AB y BC.



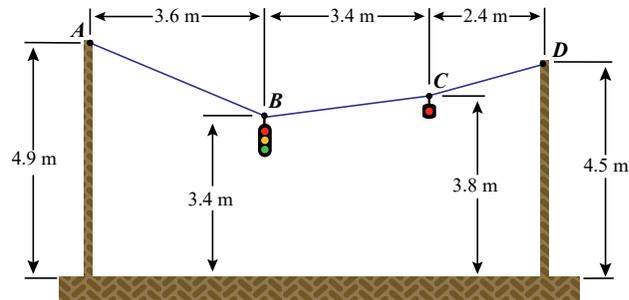
2. Tres cables se unen en el cruce del anillo C. Determine las tensiones en los cables de AC y BC causadas por el peso del cilindro de 30 kg.



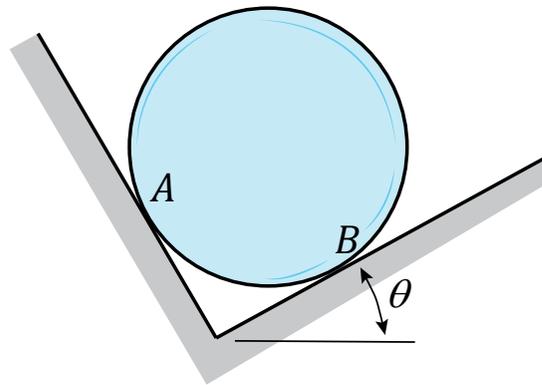
3. Si se sabe que $\alpha = 20^\circ$, determine la tensión en
 - a) en el cable AC
 - b) en la cuerda BC



4. Dos semáforos se cuelgan temporalmente de un cable como se muestra en la figura. Si el semáforo colocado en B pesa 200N, determine el peso del semáforo en C.



5. Un cilindro homogéneo de 60 kg está apoyado sobre dos planos inclinados lisos y perpendiculares entre sí. Determine las reacciones normales sobre el cilindro. $\theta = 35^\circ$.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Fuerzas en el espacio

Tema N.º3



Figura 1. Cuerpo rígido en equilibrio.

Fuente: Hibbeler, 2013.

En este tema debemos tener presente que, cuando se aplican las operaciones del álgebra vectorial a la resolución de problemas en tres dimensiones, se simplifican considerablemente si primero se representan los vectores en forma vectorial cartesiana, lo cual servirá para encontrar la fuerza resultante de un sistema de fuerzas concurrentes. Esta forma convencional cartesiana expresa a un vector en función de sus componentes cartesianas sobre los ejes que vienen a ser las proyecciones sobre los ejes.

1. Vectores cartesianos en el espacio

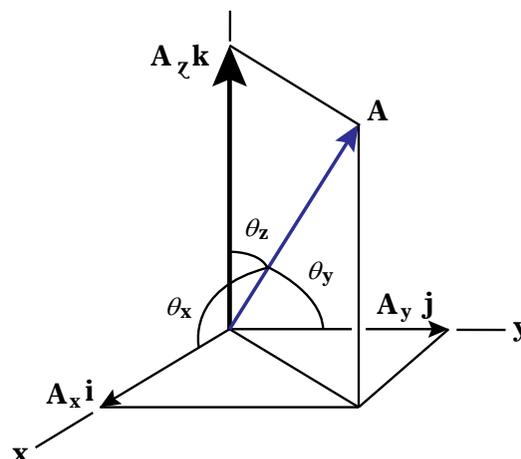
Vector unitario: Vector de magnitud unitaria que indica la dirección y sentido de algún vector dado, luego para \vec{A} :

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

Vectores unitarios cartesianos: En tres dimensiones, el conjunto de vectores unitarios cartesianos i , j y k , se usa para designar las direcciones de los ejes x , y e z , respectivamente.

2. Representación de un vector cartesiano en tres dimensiones

Esta es la representación gráfica de un vector cartesiano en el espacio.



Forma cartesiana de un vector

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Magnitud de un vector cartesiano

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Dirección de un vector cartesiano: dada por los cosenos directores.

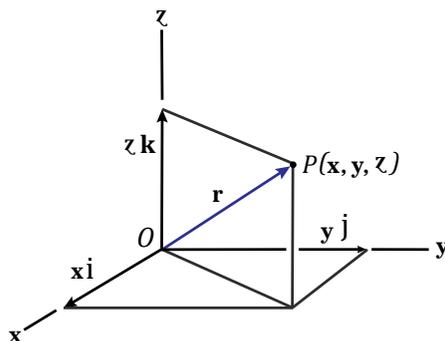
$$\cos \theta_x = \frac{A_x}{A} \quad \cos \theta_y = \frac{A_y}{A} \quad \cos \theta_z = \frac{A_z}{A}$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

3. Vector de posición

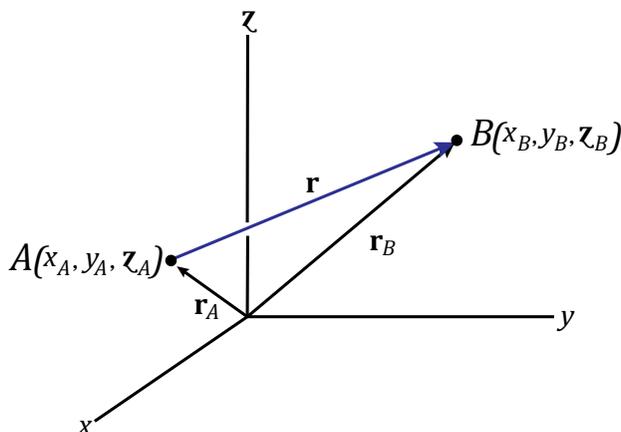
Se define como un vector fijo que localiza un punto en el espacio en relación con otro punto.

Se localiza desde el origen hasta un punto P.



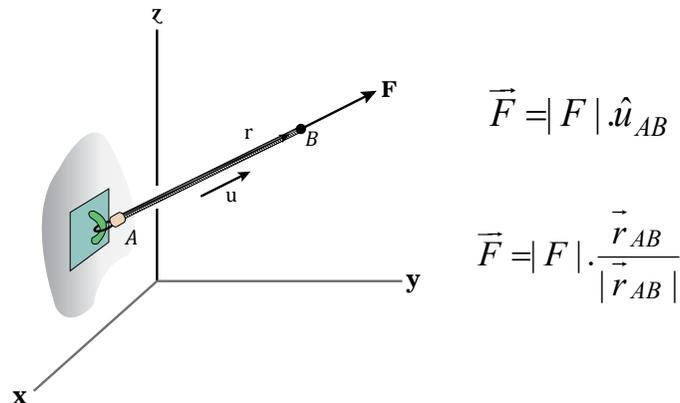
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Se localiza desde un punto A hasta otro punto B.



$$\vec{r} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

4. Vector fuerza en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción:



5. Suma de fuerzas concurrentes en el espacio

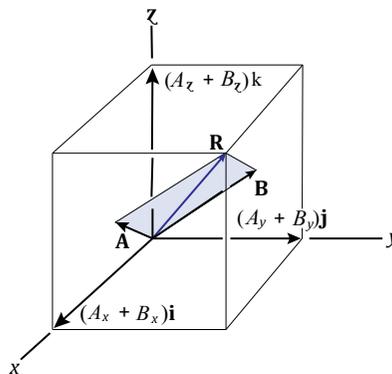
La suma de dos o más vectores se simplifican considerablemente si los vectores se expresan en términos de sus componentes cartesianas.

Dados los vectores:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

El vector resultante R está dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}$$



Si esto se generaliza y se aplica a un sistema de varias fuerzas concurrentes, entonces la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas presentes en el sistema y puede escribirse como:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k}$$

De lo cual se desprende:

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z$$

Luego, la magnitud y dirección de la resultante vienen dadas por

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

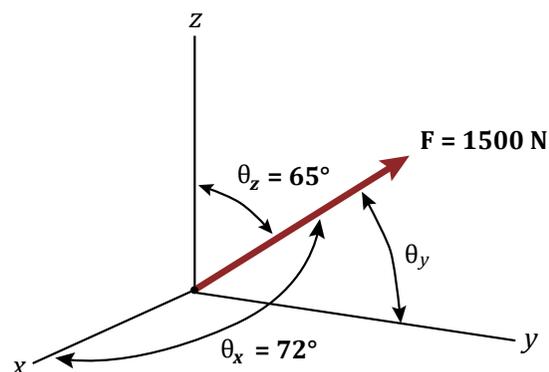
$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

Actividad N.º 3

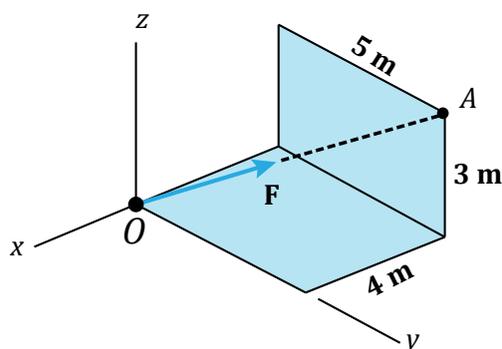
Elabore un diagrama de flujo para representar el algoritmo de equilibrio en el plano y en el espacio. Además, desarrolle los ejercicios propuestos.

Aplique los principios y leyes de la mecánica en el análisis de sistemas en equilibrio, partiendo de un marco de referencia inercial.

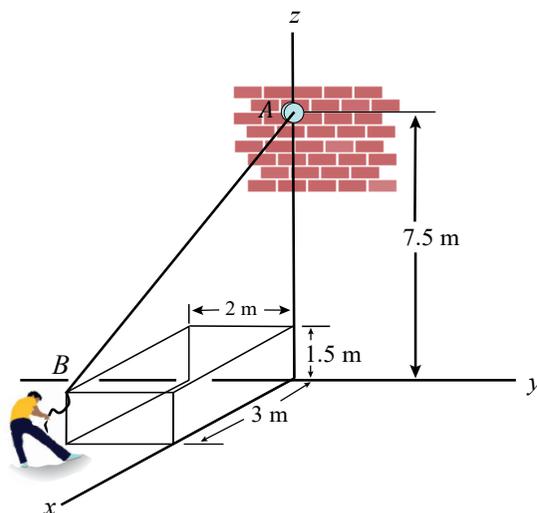
1. Se aplica una fuerza F a una partícula tal como muestra la figura. Determine el ángulo respecto al eje y . Además, exprese F en forma vectorial cartesiana.



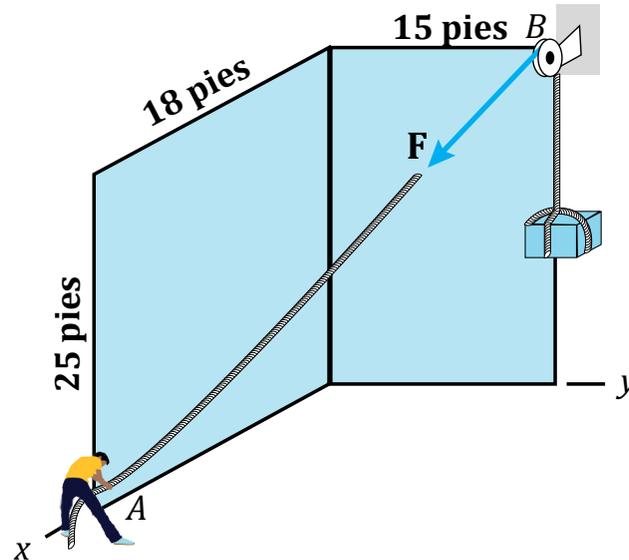
2. Determine la representación rectangular de la fuerza F , cuya magnitud es 240N.



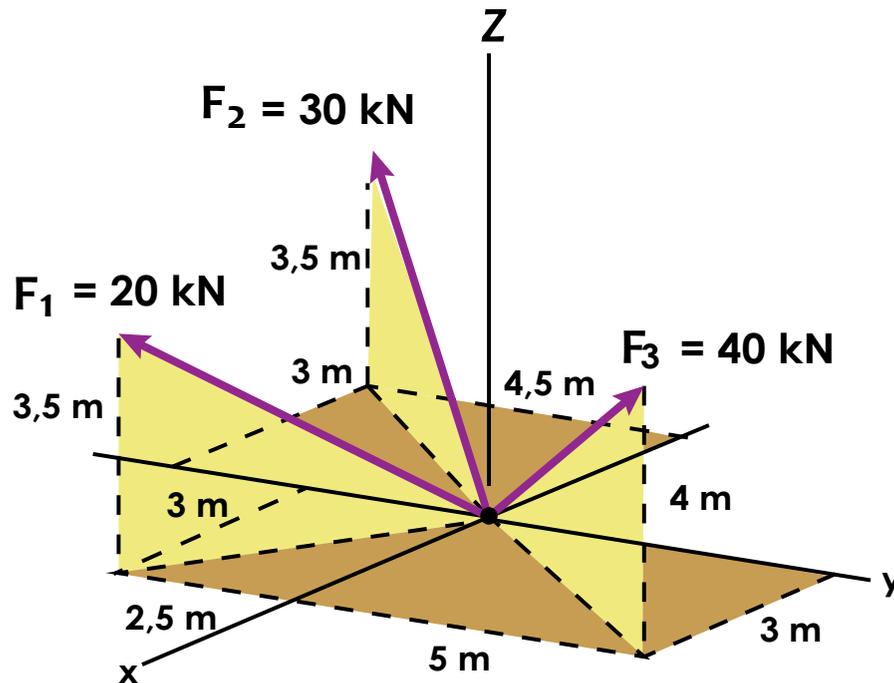
3. Si la magnitud de la tensión en el cable es de 200 N, determine la expresión cartesiana (adicionalmente su módulo y dirección) de la tensión que actúa sobre el anillo A.



4. Si la magnitud de la tensión en el cable es de 120 lb, determine la expresión cartesiana de F .



5. Determine el módulo de la resultante de las tres fuerzas representadas en la figura.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Equilibrio en el espacio

Tema N.º4



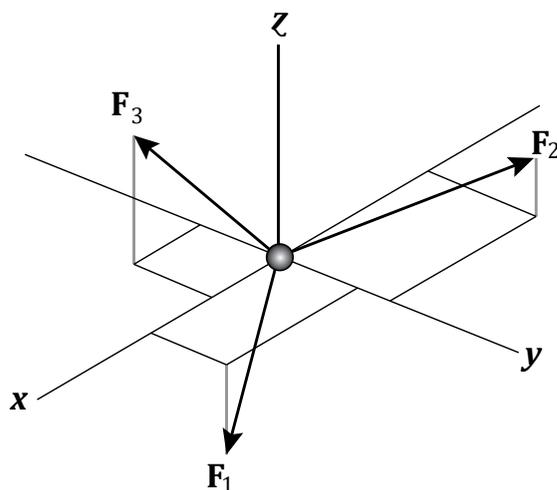
Figura 2. Cuerpo rígido en equilibrio.

Fuente: Beer, 2013.

Como anteriormente comentamos, el equilibrio representa sin duda la situación de existencia de la materia en su forma más habitual. Estamos rodeados de situaciones de cuerpo que se encuentran en equilibrio, tanto de situaciones cotidianas como construcciones simples hasta situaciones de aplicación tecnológica. Los cuerpos en equilibrio en el espacio requieren del conocimiento de las leyes y aplicación de las condiciones necesarias para tal situación, así como el uso de diagramas apropiados y cálculos pertinentes para su verificación son indispensables para una adecuada comprensión de este tema.

a. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO

En el caso de un sistema de fuerza tridimensional, como el de la figura siguiente, podemos descomponer las fuerzas en sus respectivas componentes i , j y k , de manera que para el equilibrio se debe cumplir lo siguiente:



$$\sum \vec{F} = (\sum F_x)\hat{i} + (\sum F_y)\hat{j} + (\sum F_z)\hat{k} = 0$$

Para satisfacer esta ecuación se requiere que

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0$$

Por tanto, estas tres ecuaciones establecen que la suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula a lo largo de cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

b. Procedimiento para el análisis del equilibrio de partículas en el espacio

1. Trace un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y todas las fuerzas que actúan sobre ella. Marque todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas sobre el diagrama.
2. Escriba las ecuaciones de equilibrio. Expresé primero cada fuerza como un vector cartesiano en el diagrama de cuerpo libre, sustituya esos vectores en $\sum \vec{F} = 0$ y después iguale a cero las componentes i, j y k. Si la solución para una fuerza da un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

RESUMEN DE VECTORES Y EQUILIBRIO EN EL ESPACIO

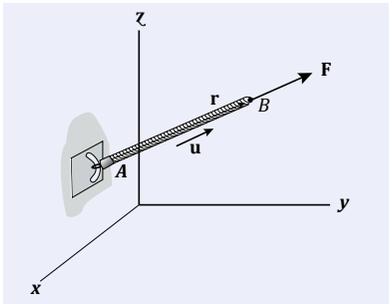
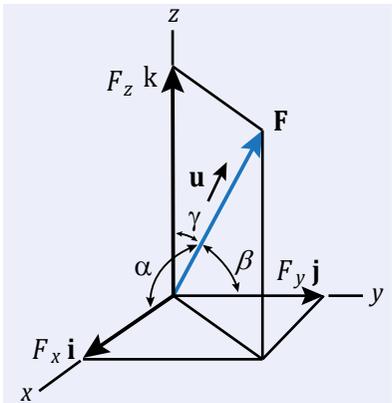
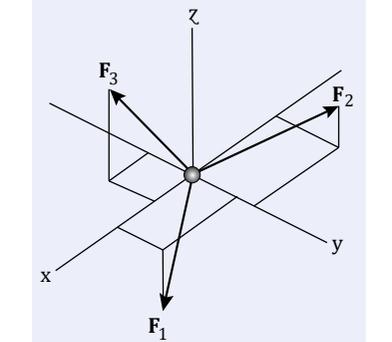
<p>Vector en función de un vector unitario</p>	$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$	
<p>Expresión cartesiana de un vector</p>	<p>Forma cartesiana</p> $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ <p>Módulo o magnitud</p> $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$	
<p>Equilibrio de una partícula en el espacio</p>	<p>PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO:</p> <p>Para que un cuerpo no se traslade, la suma de fuerzas que actúan sobre él debe ser nula.</p> $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$	

Figura 3. Equilibrio de una partícula.

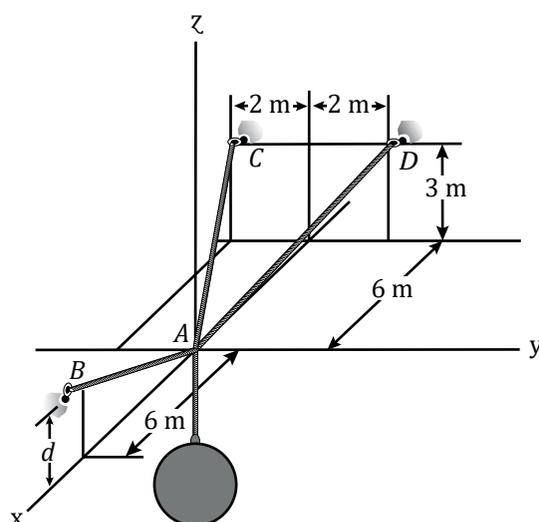
Fuente: Hibbeler, 2013.

Actividad N.º 4

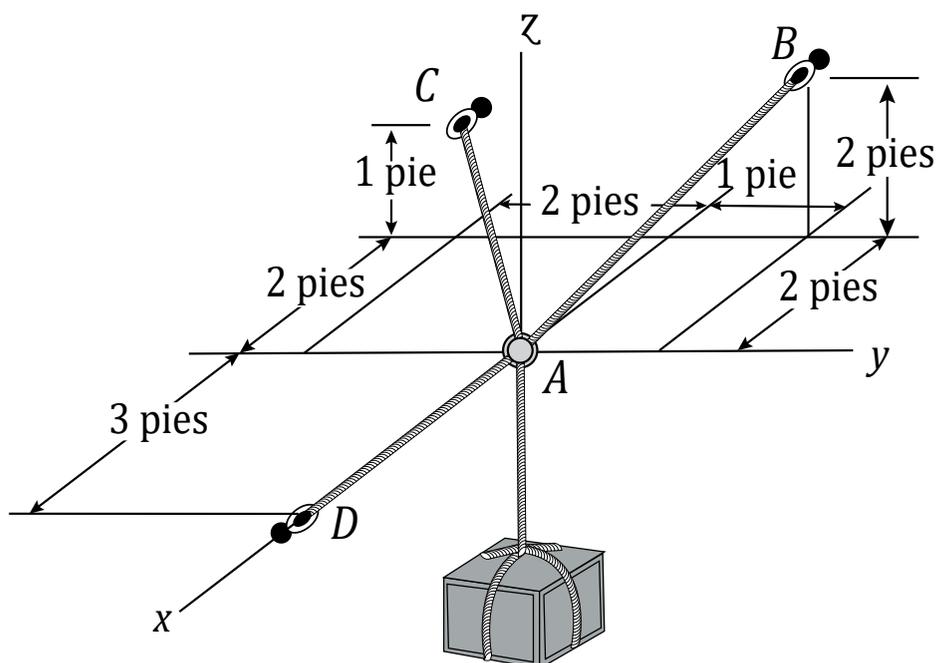
Compare el momento de una fuerza respecto a un punto con el momento de una fuerza respecto a un eje. Además, resuelva los ejercicios propuestos.

- Conozca los conceptos de momento y par de fuerzas que son los que causan giros en las máquinas.
- Reconozca sistemas equivalentes de fuerzas y momentos, y realice cálculos en tres dimensiones.

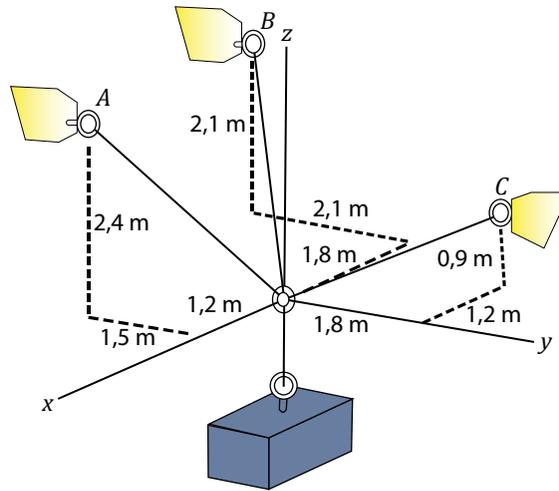
1. Para el sistema mostrado considere la masa de la carga igual a 50 kg. Determine la altura d del cable AB de manera que la fuerza en los cables AD y AC tengan cada una respectivamente la mitad del valor de la fuerza del cable AB.



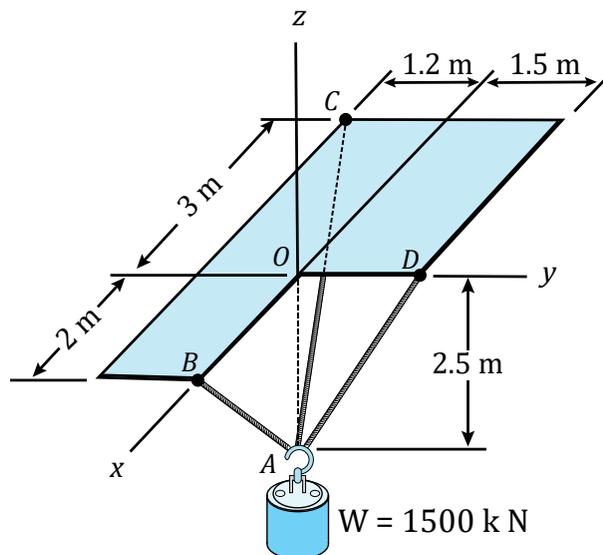
2. Determine la tensión desarrollada en el cable AC si en el cable AB la magnitud de la tensión es de 450 lb.



3. Para el bloque suspendido por el sistema de cables que se indica en la figura, se sabe que la tensión en el cable DA es 459 N. Determine la expresión cartesiana de la tensión en el cable DB y la magnitud del peso suspendido.



4. Determine la tensión desarrollada en el cable AC si el sistema está en equilibrio.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México : McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Lectura seleccionada N.º I: BURJ KHALIFA

The LEGO Group. (2011). *Burj Khalifa*. Disponible en <http://lego.build/2b9Ogca>



Glosario de la Unidad I

1. **Cuerpo rígido**

Cuerpo que se considera no afecto a la deformación que producen las fuerzas.

2. **Equilibrio**

Estado de un cuerpo que carece de aceleración, está en reposo o con velocidad constante.

3. **Fuerza**

Medida de la interacción entre cuerpos.

4. **Mecánica**

Rama de la física y la ingeniería que estudia el movimiento y el equilibrio.

5. **Masa**

Medida de la inercia de un cuerpo.

6. **Momento de una fuerza**

Medida del efecto de giro que origina una fuerza.

7. **Partícula**

Cuerpo de dimensiones despreciables.

8. **Peso**

Medida de la interacción gravitacional del planeta sobre un cuerpo.

9. **Vector**

Ente matemático que se representa gráficamente por un segmento de recta orientado.

 **Bibliografía de la Unidad I**

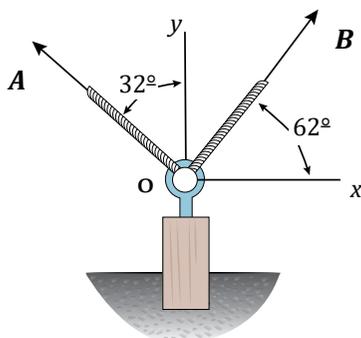
Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Meriam, J.L., & Kraige, L.G. (2010). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (7a edición). España: Editorial Reverté.

Autoevaluación N.º 1

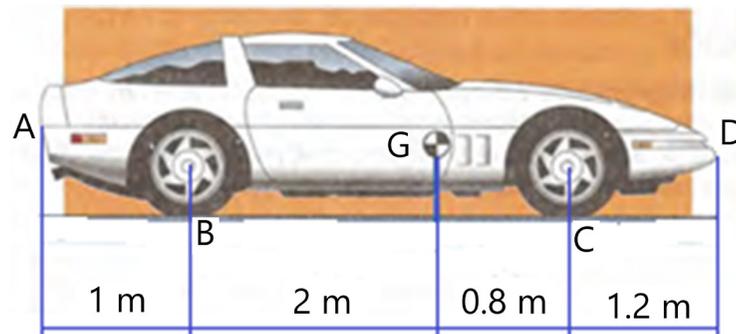
En la figura se muestran dos fuerzas de magnitudes $A = 3$ y $B = 5$ unidades.



- Determine la magnitud de la fuerza resultante de A y B usando el método del paralelogramo.
 - 5 u
 - 7 u
 - 8 u
 - 6 u
 - 4 u
- Determine la magnitud de la resultante parcial sobre el eje x usando el método de descomposición rectangular.
 - 0.758 u
 - 3.425 u
 - 0.585 u
 - 1.000 u
 - 0.446 u
- Calcule la medida del ángulo direccional respecto al eje x que forma la resultante de los vectores A y B.
 - 83.78°
 - 75.00°
 - 45.45°
 - 23.40°
 - 80.00°
- Determine la magnitud de la resultante parcial sobre el eje x, usando descomposición rectangular.
 - 6.55 u
 - 7.77 u
 - 3.45 u

- D. 1.23 u
- E. 6.96 u

En la siguiente figura, el automóvil tiene una masa de 800 kg. En los extremos A y D existen fuerzas verticales hacia abajo, cada una de 500N. Dibuje el DCL del auto para idealizar las fuerzas actuantes sobre él. Utilice $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.



5. Determine el momento de fuerza de la fuerza de 500 N aplicada en el punto A, respecto al punto B.

- A. - 50 N.m
- B. + 50 N.m
- C. - 500 N.m
- D. + 500 N.m
- E. + 5 N.m

6. Determine la magnitud de la reacción del piso sobre las llantas traseras del auto.

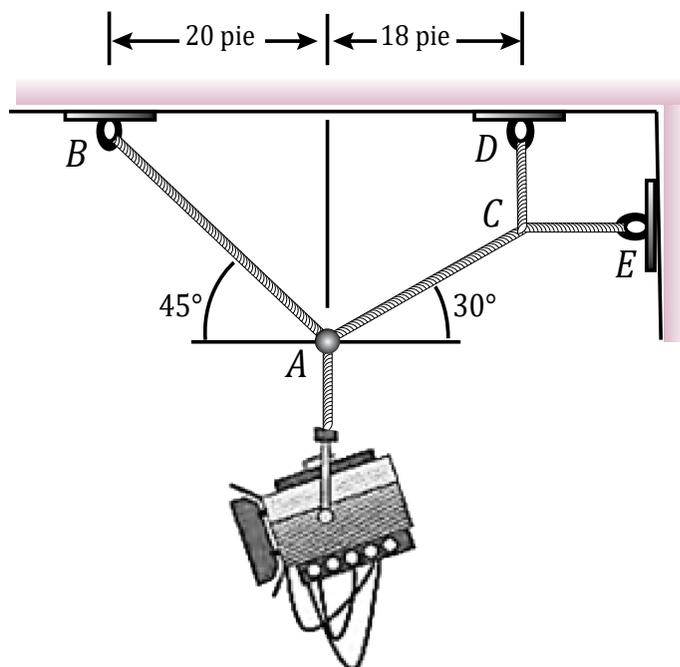
- A. 2706.57 N
- B. 5687.3 N
- C. 6583.6 N
- D. 7583.3 N
- E. 4583.3 N

7. Determine la magnitud de la reacción del piso sobre las llantas delanteras del auto.

- A. 5000.2 N
- B. 6141.43 N
- C. 5556.3 N
- D. 1234.7 N
- E. 4316.7 N

Un sistema de cables sostiene un banco de luces de 1000 lb de peso sobre un estudio cinematográfico.

- a) La tensión en los cables AB y AC. 5P
- b) La tensión en los cables CD y CE. 5p



8. Determine la magnitud de la tensión en el cable AB.

- A. 1000 N
- B. 896.6 N
- C. 909.9 N
- D. 2692.6 N
- E. 1743.1 N

9. Calcule el valor de la tensión en el cable CE.

- A. 1000 N
- B. 985.7 N
- C. 909.9 N
- D. 634.0 N
- E. 1743.1 N

10. Determine la magnitud de la tensión en el cable vertical.

- A. 1000 N
- B. 985.7 N
- C. 909.9 N
- D. 2692.6 N
- E. 366.0 N

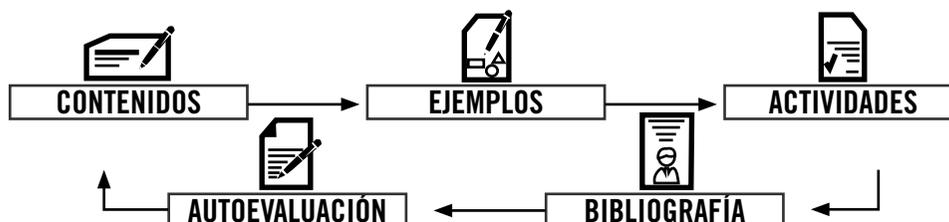
NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). Mecánica para ingeniería: Estática. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). Mecánica para ingeniería: Estática. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). Mecánica vectorial para ingenieros: Estática. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). Mecánica para ingenieros. Estática. (12a ed.). México: Pearson Educación.

UNIDAD II

Equilibrio de cuerpos rígidos, centroides y centros de gravedad

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD II



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Resultados del aprendizaje de la Unidad II: Al finalizar la unidad, el estudiante comprende sistemas de fuerzas equivalentes. Aplica las ecuaciones de equilibrio estático del cuerpo rígido mediante modelos matemáticos determinando las reacciones en los apoyos en los elementos conformantes del sistema en estudio. Además, determina los centroides y centros de gravedad de cuerpos arbitrarios. Resuelve problemas aplicativos con exactitud.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p>Tema N.º 1: Cuerpos rígidos. Sistemas equivalentes de fuerzas</p> <ol style="list-style-type: none"> Cuerpo rígido y principio de transmisibilidad Momento de una fuerza con respecto a un punto Teorema de Varignon o principio de momentos Momento de una fuerza con respecto a un eje Pares. Momento de un Par Sistemas equivalentes de fuerzas 	<ol style="list-style-type: none"> Determina la magnitud y dirección del momento de una fuerza, que en particular producen giros en las máquinas. Calcula e interpreta el momento de un par. Reconoce sistemas equivalentes de fuerzas y momentos. <p>Actividad N.º 1 Resuelve ejercicios y problemas de cuerpos rígidos y sistemas equivalentes de fuerzas.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Se motiva por la utilidad que tiene el equilibrio de los cuerpos rígidos, los cuales sustentan la diversidad de usos de las estructuras que existen en nuestra sociedad. Participa en lograr su aprendizaje de las técnicas para determinar el centro de gravedad de un cuerpo y valora la contribución que tiene en el desarrollo de múltiples aplicaciones tecnológicas.
<p>Tema N.º 2: Equilibrio de cuerpos rígidos en dos dimensiones</p> <ol style="list-style-type: none"> Equilibrio en dos dimensiones Diagrama de cuerpo libre Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas 	<ol style="list-style-type: none"> Establece y aplica condiciones de equilibrio de los cuerpos rígidos en el plano con diferentes soportes, así como las restricciones a las mismas. Aplica las condiciones de equilibrio de cuerpos rígidos sometidos a dos o a tres fuerzas, en dos dimensiones. <p>Actividad N.º 2 Resuelve ejercicios y problemas sobre equilibrio de cuerpos rígidos en dos dimensiones.</p>	
<p>Tema N.º 3: Equilibrio de cuerpos rígidos en tres dimensiones</p> <ol style="list-style-type: none"> Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones Reacciones en los apoyos y conexiones de una estructura tridimensional 	<ol style="list-style-type: none"> Establece y aplica condiciones de equilibrio de los cuerpos rígidos en el espacio con diferentes soportes. <p>Actividad N.º 3 Resuelve ejercicios y problemas sobre equilibrio de cuerpos rígidos en tres dimensiones.</p>	

Tema N.º 4: Centroides y centro de gravedad

1. Introducción. Centroides de áreas y líneas
2. Centros de gravedad en líneas, en áreas y en volúmenes
3. Centro de gravedad de cuerpos compuestos
4. Determinación del centroide por integración
5. Fórmulas de centroides de figuras comunes de áreas y de líneas
6. Teorema de Pappus-Guldinus.

Lectura seleccionada N.º 2:

El Canal de Panamá

Autoevaluación de la Unidad II

7. Muestra cómo se determina el centro de gravedad y el centroide, para un sistema de partículas discretas y de un cuerpo de forma arbitraria.

8. Utiliza el teorema de Pappus-Guldinus para encontrar el área superficial y el volumen de un cuerpo que tiene simetría axial

Actividad N.º 4

Determina los centroides de cuerpos compuestos, resuelve ejercicios propuestos.

Tarea académica N.º 1:

Elabora una monografía de las lecturas seleccionadas N.º 1, 2 y 3.

Cuerpos rígidos. Momento de fuerza

Tema N.º1



Figura 4. Cuerpo rígido en equilibrio.
Fuente: Tomada de Hibbeler, 2013.

Un cuerpo rígido puede considerarse como una combinación de un gran número de partículas donde todas estas permanecen a una distancia fija entre sí, tanto antes como después de la aplicación de una carga. Este modelo es importante porque las propiedades del material de todo cuerpo que se supone rígido no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que ocurren en estructuras, máquinas, mecanismos, etcétera, son relativamente pequeñas, y el supuesto de cuerpo rígido resulta adecuado para el análisis.

Los efectos de las fuerzas dependen no solo de sus magnitudes y direcciones, sino también de los momentos que ejercen. El momento de una fuerza es una medida de su tendencia a causar giros. Los momentos causan el giro de maquinaria como la manivela de un barco de vela, las ruedas de un vehículo, los cigüeñales y las turbinas. Aun si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, estas pueden ejercer un momento que se denomina "par". Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas externas y pares actuantes en él es igual a cero. Antes de continuar con el estudio del diagrama de cuerpo libre y del equilibrio, es necesario conocer sobre los momentos, los pares y el concepto de sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.

1. Cuerpos rígidos y principio de transmisibilidad

En toda la línea de acción de una fuerza, su efecto externo ejercido sobre un cuerpo rígido es invariable. Luego, según Beer et al. (2013):

el principio de transmisibilidad establece que las condiciones de equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza F que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza F' que tiene la misma magnitud, dirección y sentido, pero que actúa en un punto distinto, siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción (p. 62).

Las dos fuerzas F y F' tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son equivalentes. Las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales

tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula mis-ma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, el punto de aplicación de una fuerza no es importante siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido deben ser representadas por una clase de vector diferente, el vector deslizante.

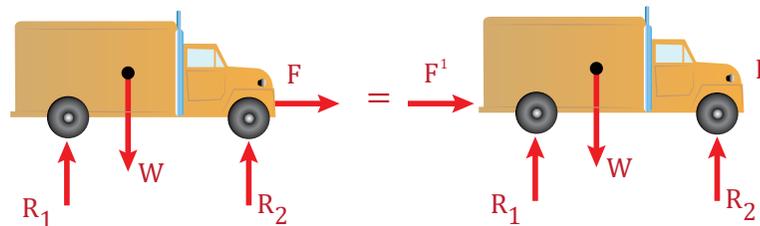
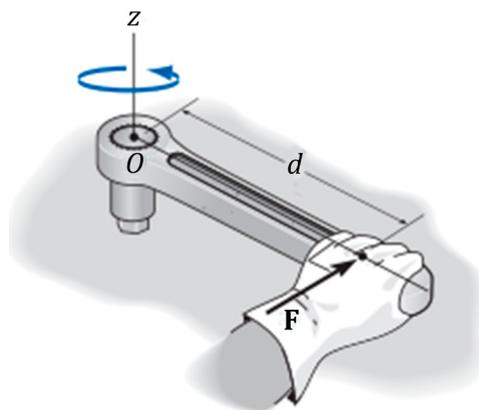


Figura 5. Principio de transmisibilidad.
Fuente: Beer, 2013.

2. Momento de una fuerza

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, esta producirá una tendencia a que el cuerpo gire alrededor de un punto que no está en la línea de acción de la fuerza. Esta tendencia a girar se conoce en ocasiones como par de torsión, pero con mayor frecuencia se denomina el momento de una fuerza o simplemente el momento. Tal es el caso de la llave de torsión que se usa para desenroscar el perno de la figura adjunta. Si se aplica una fuerza al maneral de la llave, esta tenderá a girar el perno alrededor del punto O (o el eje z).

La magnitud del momento es directamente proporcional a la magnitud de F y a la distancia perpendicular o brazo de momento d . Cuanto más grande sea la fuerza o más grande sea el brazo de momento, mayor será el momento o el efecto de giro. Las unidades del momento son el producto de las unidades de fuerza y distancia, es decir, N.m o lb.pie.

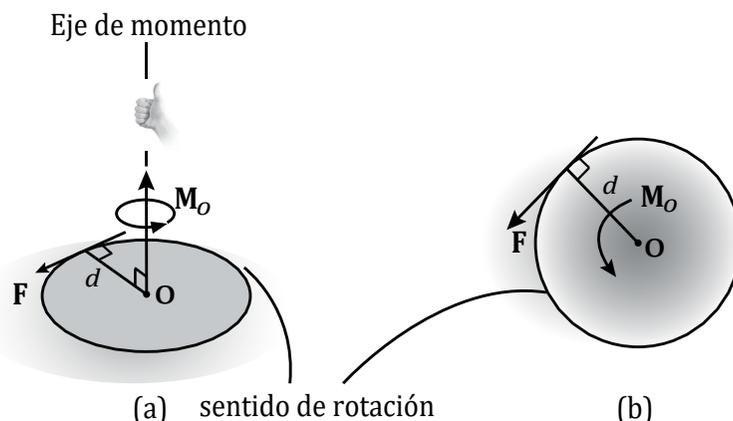


3. Formulación escalar del momento de una fuerza con respecto a un punto

Considerando la figura siguiente, el vector momento M_o con respecto al punto O , o con respecto a un eje que pase por O y sea perpendicular al plano, tiene magnitud y dirección específicas.

Magnitud: La magnitud de M_o es $M_o = F d$

donde d representa el brazo de momento o distancia perpendicular desde el eje en el punto O hasta la línea de acción de la fuerza.



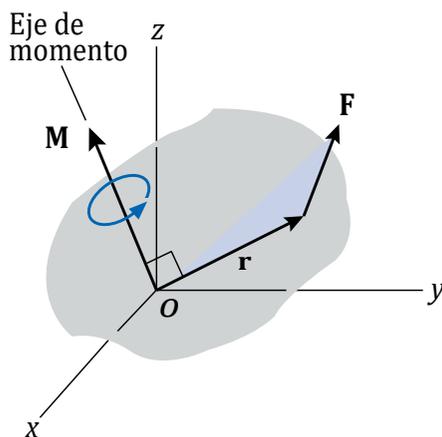
Dirección: La dirección de \mathbf{M}_o está definida por su eje de momento, el cual es perpendicular al plano que contiene la fuerza \mathbf{F} , y por su brazo de momento d .

Para establecer el sentido de dirección de \mathbf{M}_o , se utiliza la regla de la mano derecha. De acuerdo con esta regla, el curvado natural de los dedos de la mano derecha cuando estos se doblan sobre la palma representa la tendencia para la rotación.

En dos dimensiones, este vector se representa con la flecha curva como en la figura b. Por consiguiente, el sentido de rotación puede ser anti horario (positivo) u horario (negativo).

4. Formulación vectorial del momento de una fuerza respecto a un punto

El momento de una fuerza F con respecto al punto O , es decir, con respecto al eje del momento que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a O y a F , puede expresarse por el producto vectorial.



$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

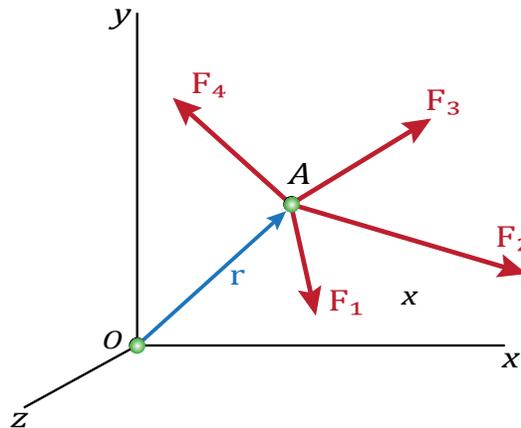
$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Aquí \vec{r} representa un vector de posición trazado desde O hasta cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de F.

5. Principio de momentos o teorema de Varignon

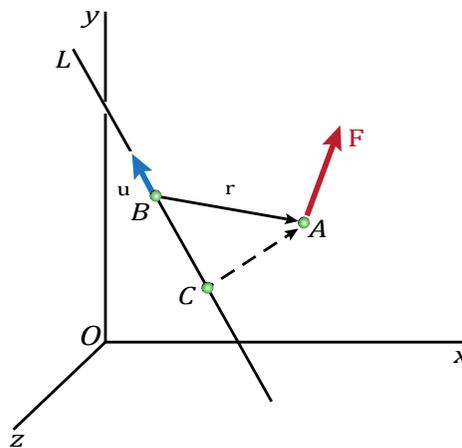
El momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O.

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots$$



6. Momento de una fuerza con respecto a un eje

El momento de una fuerza respecto a un eje L se puede obtener:



$$M_{\text{eje}} = \vec{\mu} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

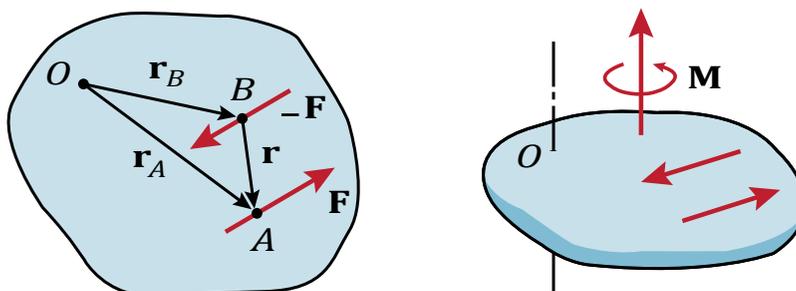
$\vec{\mu}$ es el vector unitario del eje L.

\vec{r} es el vector de posición trazado desde cualquier punto del eje a un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza.

$$M_{\text{eje}} = \begin{vmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

7. Momento de un par

Se dice que dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par. Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originaran una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, estas sí tenderían a hacerlo rotar.



$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

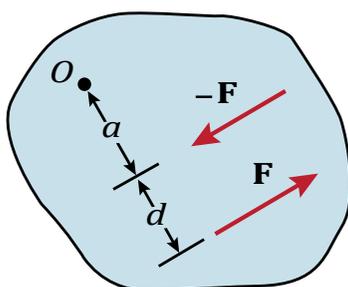
El momento de un par se da por la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto O:

\mathbf{r} : Vector de posición que va del punto B al punto A cualesquiera.

En la siguiente figura se verifica que la magnitud del momento par está dada por

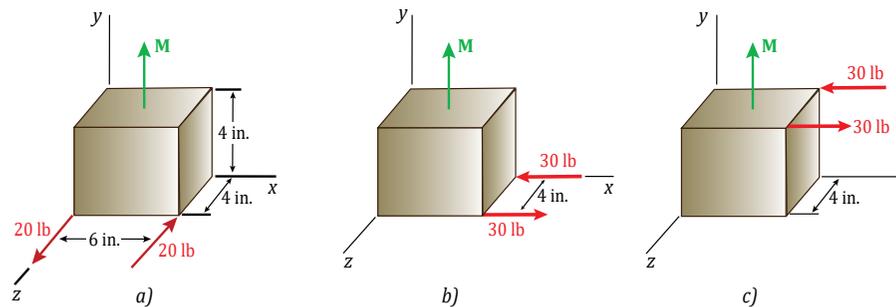
$$M = F(a+d) - Fa$$

$$M = Fd$$



7. Pares equivalentes

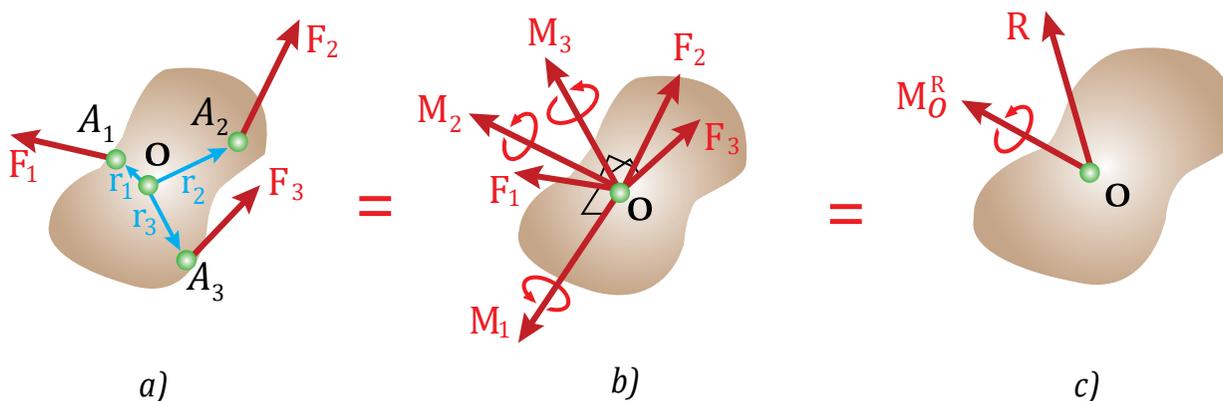
Se sabe que los vectores momento de los pares son vectores libres y se pueden sumar o restar independientemente de su posición en el espacio. Luego, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento M (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120 \text{ lb. in}$), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.



8. Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema equivalente de fuerza y momento par

Considérese un sistema de fuerzas F_1, F_2, F_3, \dots que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, \dots , definidos por los vectores de posición r_1, r_2, r_3, \dots (figura a). La fuerza F_1 puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O , si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento M_1 , igual al momento $r_1 \times F_1$ de F_1 con respecto a O . Si se repite este procedimiento con F_2, F_3, \dots , se obtiene el sistema mostrado en la figura b, que consta de las fuerzas originales, ahora actuando en O , y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante R . De manera similar, los vectores de par M_1, M_2, M_3, \dots pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un único vector de par M_O^R . Por tanto, cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza par que actúa en un punto dado O . (figura c).

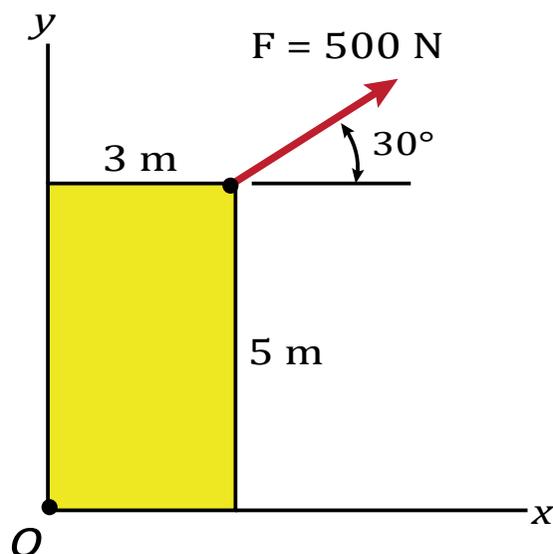
$$R = \Sigma F \quad M_O^R = \Sigma M_O = \Sigma(r \times F)$$



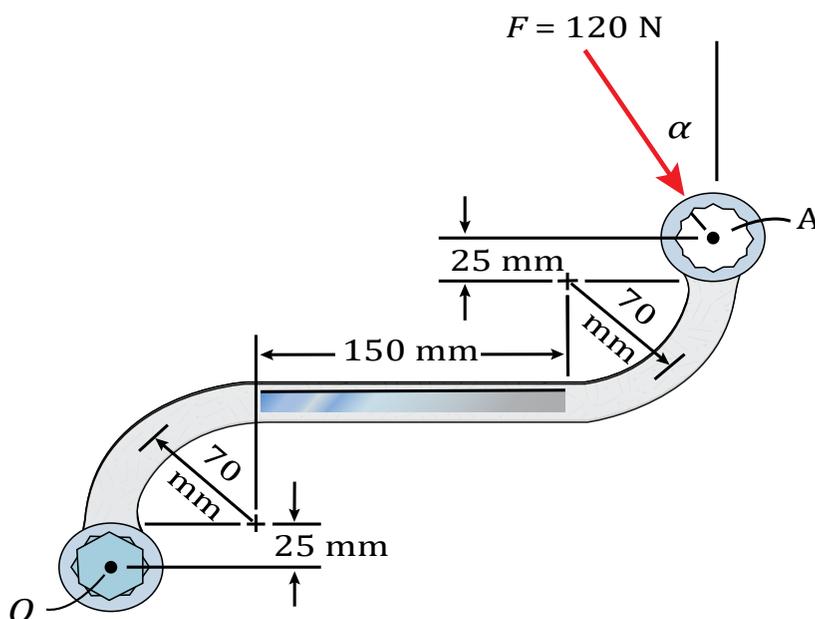
Actividad N° 1

Compare el momento de una fuerza respecto a un punto con el momento de una fuerza respecto a un eje. Además, resuelve los ejercicios propuestos.

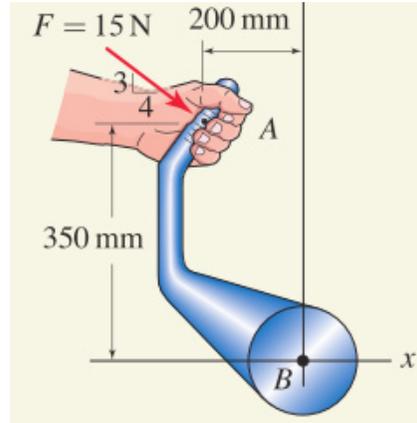
- Conozca los conceptos de momento y par de fuerzas, que son los que causan giros en las máquinas.
 - Reconozca sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.
1. Determine el momento respecto al punto O (en realidad, respecto al eje z que pasa por O) de la fuerza de 500 N representada en la figura.



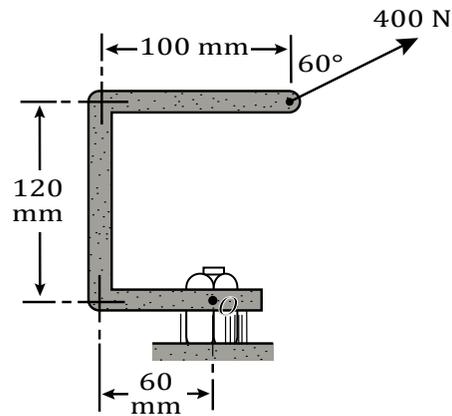
2. La fuerza de 120 N es aplicada como se muestra en A. Si $\alpha = 30^\circ$, determine el momento de F respecto al centro O del perno.



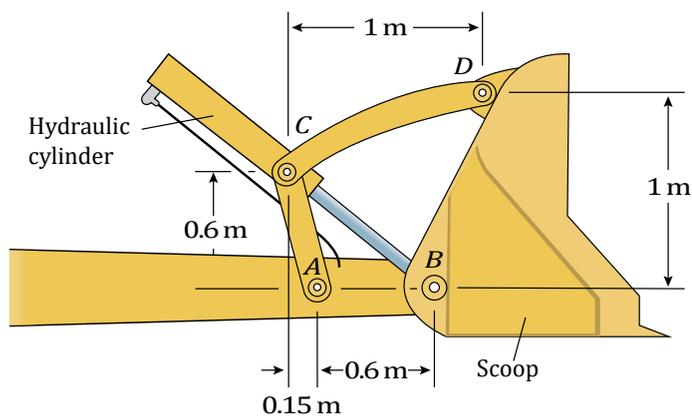
3. Determine el momento de F respecto de B .



4. Determine, respecto a O , el momento de fuerza en forma escalar usando componentes de F .



5. El cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 8 kN que es paralela a la botella y a los puntos C y B . Determine los momentos de la fuerza sobre los puntos A y D .



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F. & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E. & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Equilibrio de cuerpos rígidos en el plano

Tema N°2

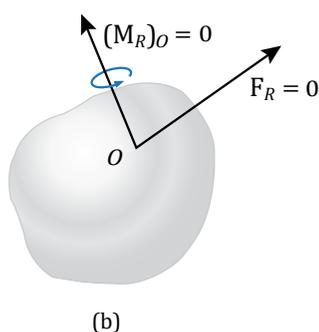
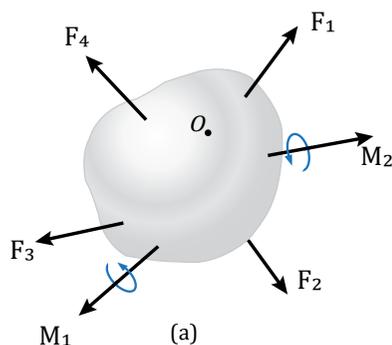


Figura 5. Cuerpo rígido en equilibrio.

Fuente: Beer, 2013.

Hasta ahora hemos aprendido que la estática es el análisis de cuerpos en equilibrio, incluidos los puentes, las presas y los edificios. Ahora que ya sabemos cómo calcular momentos de fuerza, ya podemos enfrentarnos a problemas de equilibrio más interesantes. En este tema establecemos las ecuaciones de equilibrio y describimos modelos sencillos de los diversos tipos de soportes utilizados en ingeniería. Luego, mostramos cómo usar las ecuaciones de equilibrio para obtener información respecto a los sistemas de fuerzas y momentos que actúan sobre los cuerpos.

1. Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido



El sistema mostrado de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo (figura a) pueden reducirse a una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en cualquier punto arbitrario O sobre el cuerpo o fuera de él (figura b). La condición para el equilibrio es que tanto la fuerza como el momento de par resultantes sean iguales a cero. Matemáticamente, el equilibrio de un cuerpo se expresa como

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = 0$$

- ✓ La primera de estas ecuaciones establece que la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a cero. Ello verifica traslación nula.
- ✓ La segunda ecuación establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas en el sistema con respecto al punto O, añadida a todos los momentos de par, es igual a cero. Con lo cual se verifica rotación nula.

2. Equilibrio en dos dimensiones

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos. Por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre diferentes vigas y estructuras planas, pinzas, algunas grúas y otras máquinas, así como ciertos tipos de puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

Ecuaciones escalares de equilibrio en dos dimensiones

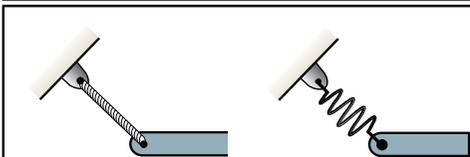
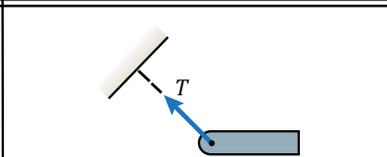
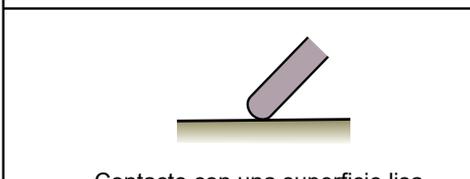
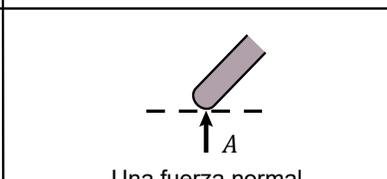
Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema bidimensional de fuerzas y momentos (momentos perpendiculares al plano), se encuentran relacionadas por tres ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_{cualquier\ punto} = 0$$

Soportes

Algunos tipos muy comunes de soportes se representan con modelos estilizados llamados convenciones de soporte. Los soportes reales a menudo se parecen a los modelos estilizados, pero, aunque no se parecieran, los representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones
 <p>Cuerda o cable Resorte</p>	 <p>Una fuerza colineal</p>
 <p>Contacto con una superficie lisa</p>	 <p>Una fuerza normal</p>

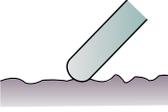
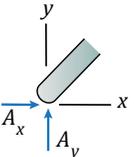
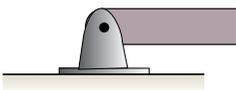
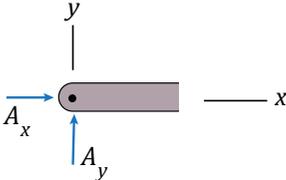
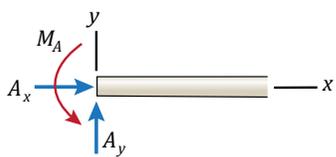
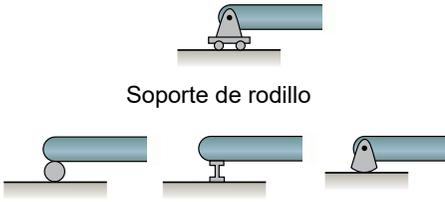
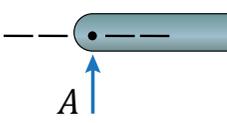
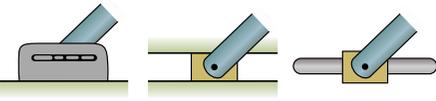
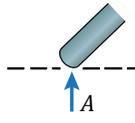
Soportes	Reacciones
 Contacto con una superficie rugosa	 Dos componentes de fuerza
 Soporte de pasador	 Dos componentes de fuerza
 Soporte empotrado	 Dos componentes de fuerza y un par
 Soporte de rodillo Soporte equivalentes	 Una fuerza normal
 Pasador guiado o deslizador	 Una fuerza normal

Figura 6. Soportes en el plano.

Fuente: Bedford, 2000, p. 210.

Diagrama de cuerpo libre

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido o cualquier grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deben darse los siguientes pasos:

1. Trace el contorno:

Idealice el cuerpo aislado o recortado "libre" de sus restricciones y conexiones, y delinee (en un bosquejo) su contorno.

2. Muestre todas las fuerzas y momentos de par.

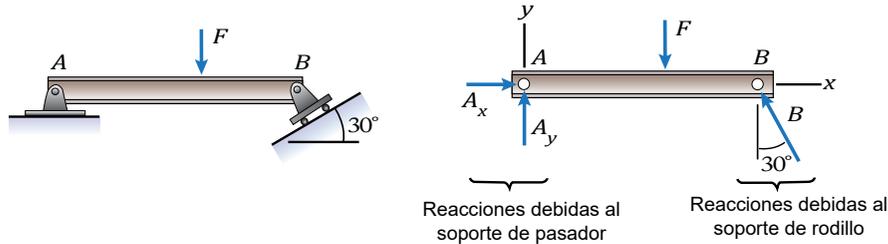
Identifique todas las fuerzas externas conocidas y desconocidas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo. Las que por lo general se encuentran se deben a (1) cargas aplicadas, (2) reacciones que ocurren en los soportes o en puntos de contacto con otros cuerpos, y (3) el peso del cuerpo.

3. Identifique cada carga y las dimensiones dadas

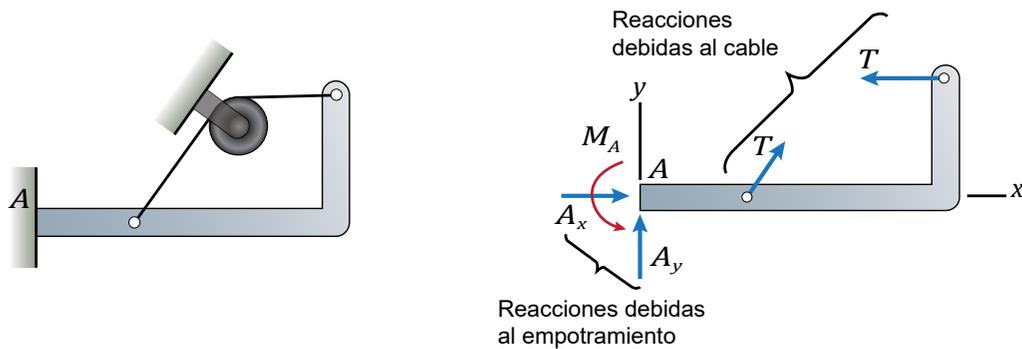
Las fuerzas y los momentos de par que se conocen deben marcarse con sus propias magnitudes y direcciones. Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

Ejemplos de DCL:

a. Viga ingrávida soportada por un pasador y un rodillo.



b. Cuerpo ingrávido soportado por un empotramiento y un cable unido a él en dos puntos.

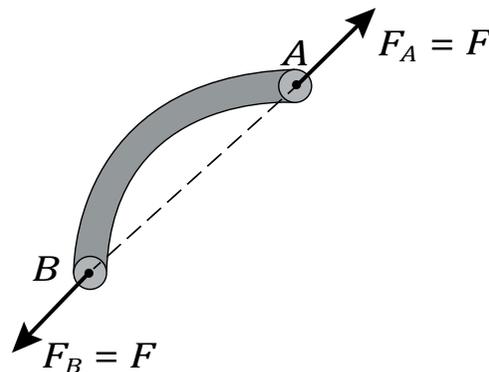


3. Equilibrio en elementos de dos y tres fuerzas

Elemento de dos fuerzas

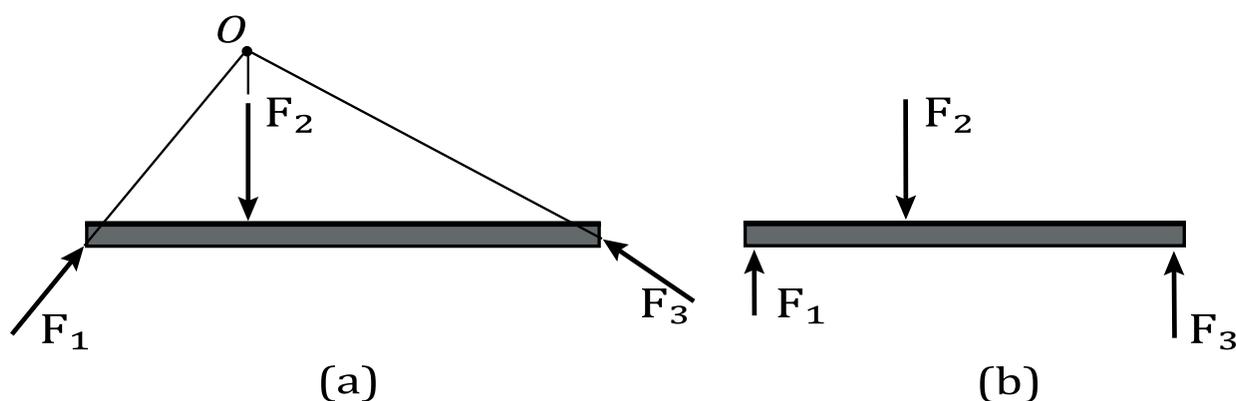
El elemento tiene fuerzas aplicadas en solo dos puntos sobre el elemento. Un ejemplo se muestra en la figura adjunta. Para satisfacer el equilibrio de fuerzas, F_A y F_B deben tener la misma magnitud, $F_A = F_B = F$, pero dirección opuesta.

Por lo tanto, para que cualquier elemento de dos fuerzas esté en equilibrio, las dos fuerzas que actúan sobre él deben tener la misma magnitud, actuar en direcciones opuestas y tener la misma línea de acción, dirigida a lo largo de la línea que une los puntos donde actúan estas fuerzas.



Elemento de tres fuerzas

Si un elemento está sometido a solo tres fuerzas, se denomina “elemento de tres fuerzas”. El equilibrio de momento se puede satisfacer solo si las tres fuerzas forman un sistema de fuerzas concurrentes o paralelas. Para ilustrar esto, considere el elemento sometido a las tres fuerzas F_1 , F_2 y F_3 , que se muestra en la figura a. Si las líneas de acción de F_1 y F_2 se intersectan en el punto O , entonces la línea de acción de F_3 también debe pasar por el punto O , de modo que las fuerzas satisfagan $\sum M_O = 0$. Como caso especial, si las tres fuerzas son paralelas (figura b), la ubicación del punto de intersección O se aproximará al infinito.



Luego, para el caso de elementos a dos y tres fuerzas, analizar el equilibrio implica establecer ecuaciones que no requieren del trazo de vectores componentes y su solución es respaldada por la geometría del problema.

4. Procedimiento para el análisis del equilibrio de un cuerpo rígido en el plano

1. Diagrama de cuerpo libre

- ✓ Establezca los ejes x e y en cualquier orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

2. Aplique las ecuaciones de equilibrio: $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_{\text{cualquier punto}} = 0$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo. Los momentos de par son positivos si tienen rotación antihoraria.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

RESUMEN DE EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN EL PLANO

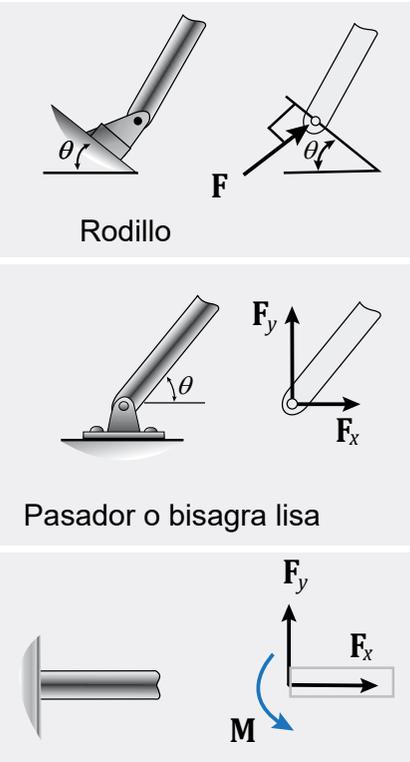
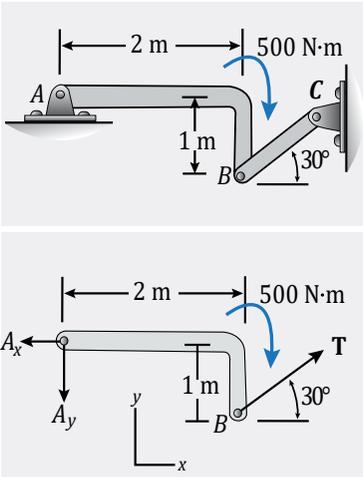
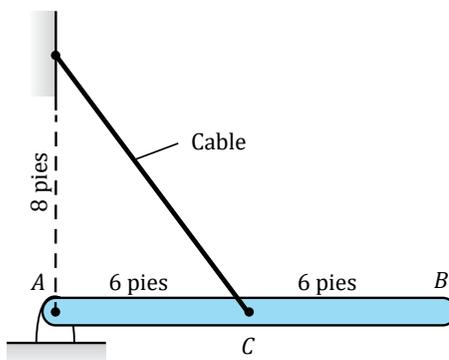
<p>CONDICIONES DE EQUILIBRIO</p>	<p>Un cuerpo en equilibrio no gira pero puede trasladarse con velocidad constante, o no se mueve</p>	$\sum F = 0$ $\sum M = 0$
<p>ECUACIONES ESCALARES</p>	<p>Basta aplicar las condiciones de equilibrio en forma escalar.</p>	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_O = 0$
<p>DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE</p>	<p>Reacciones más comunes en soportes:</p>  <p>Rodillo</p> <p>Pasador o bisagra lisa</p>	

Figura 7. Equilibrio en el plano.
Fuente: Hibbeler, 2013.

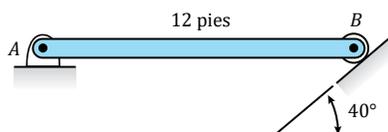
Actividad N.º 2

Analice el equilibrio de cuerpos rígidos en el plano:

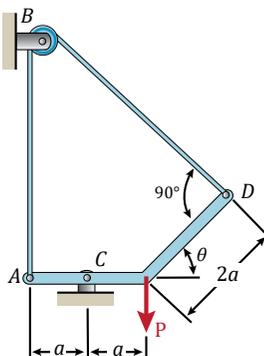
1. Si la varilla homogénea pesa 100 lb, determine las reacciones en el pasador A y en el cable.



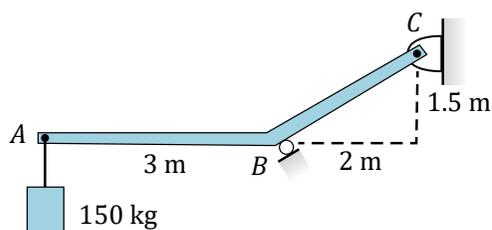
2. Para la varilla homogénea de 50 lb de longitud, determine las reacciones en el pasador A y en el rodillo B.



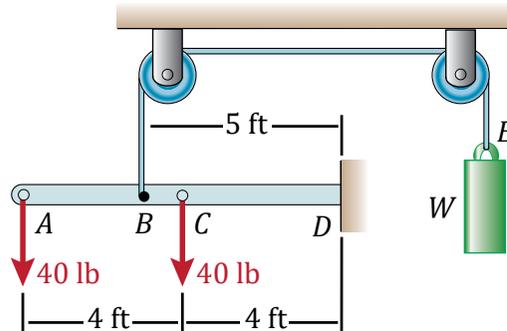
3. Sin tomar en cuenta la fricción, determine, en función de P, la tensión en el cable ABD y la reacción en el pasador C, cuando $\theta = 60^\circ$. Considere que la varilla es ingrávida.



4. Ignorando el peso de la varilla y siendo la masa de 10 kg, determine la reacción en el pasador C y en el rodillo de apoyo en B.



5. Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de W para los que la magnitud del par en D no excede $40 \text{ lb}\cdot\text{ft}$.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Bedford, F. & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Equilibrio de cuerpos rígidos en tres dimensiones

Tema N.º3



Figura 8. Cuerpos rígidos en tres dimensiones.

Fuente: Beer, 2013.

Hemos visto que cuando un cuerpo en equilibrio está sometido a un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, no se pueden obtener más de tres ecuaciones independientes de equilibrio. En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se pueden obtener hasta seis ecuaciones independientes de equilibrio: las tres componentes de la suma de las fuerzas deben ser nulas y las tres componentes de la suma de los momentos respecto a cualquier punto deben también ser iguales a cero.

El procedimiento para determinar las reacciones sobre cuerpos sometidos a sistemas tridimensionales de fuerzas y momentos -dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio- es el mismo que para el de dos dimensiones. Solo se requiere familiarizarse con las convenciones de soporte usadas en las aplicaciones tridimensionales.

1. Equilibrio en tres dimensiones

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos en sistemas espaciales; por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre estructuras espaciales, grúas y máquinas, así como techos, puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

Ecuaciones vectoriales de equilibrio en tres dimensiones

Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden ser expresadas matemáticamente en forma vectorial como

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_o = 0$$

donde $\Sigma \vec{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma \vec{M}_o$ es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto O localizado en o fuera del cuerpo.

Ecuaciones escalares de equilibrio en tres dimensiones

Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se encuentran relacionadas por seis ecuaciones escalares de equilibrio:

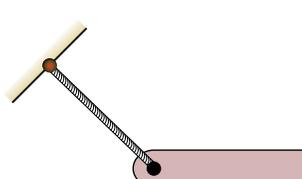
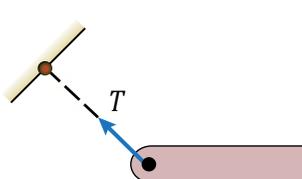
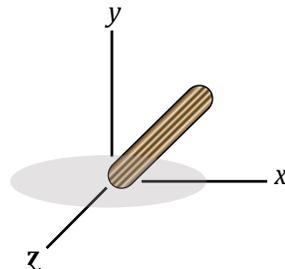
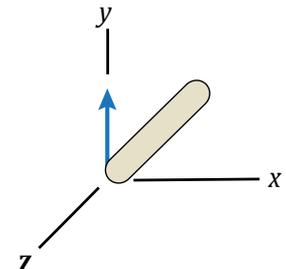
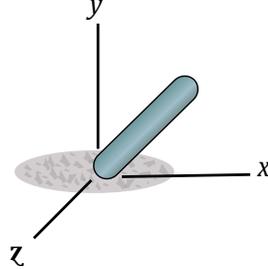
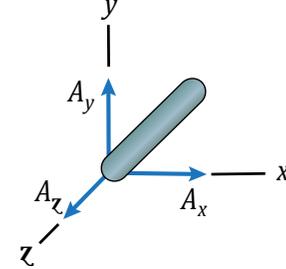
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

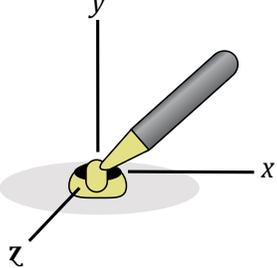
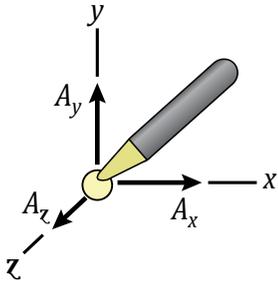
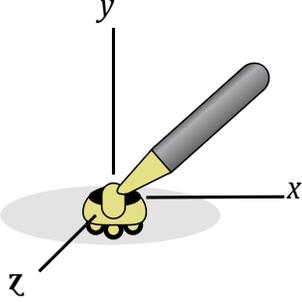
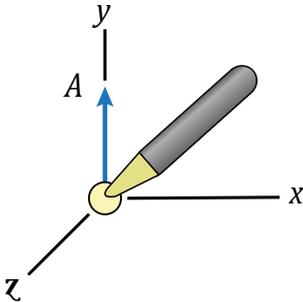
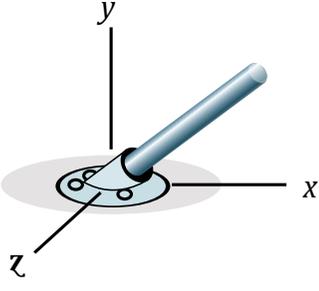
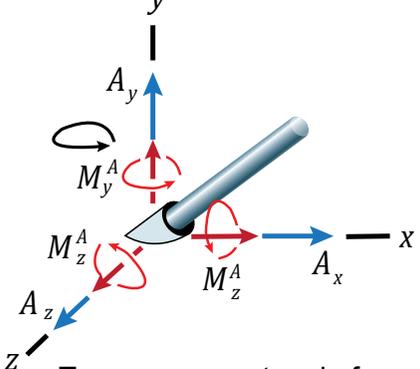
Al usar estas seis ecuaciones escalares de equilibrio se puede resolver cuando mucho seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre.

Soportes:

Aun cuando los soportes reales no se parezcan físicamente a los modelos, representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones
 <p>Cuerda o cable</p>	 <p>Una fuerza colineal</p>
 <p>Contacto con una superficie lisa</p>	 <p>Una fuerza normal</p>
 <p>Contacto con una superficie rugosa</p>	 <p>Tres componentes de fuerza</p>

Soportes	Reacciones
 <p data-bbox="420 667 730 705">Soporte de bola y cuenca</p>	 <p data-bbox="999 683 1344 716">Tres componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="462 1052 714 1086">Soporte de rodillos</p>	 <p data-bbox="1016 1041 1268 1086">Una fuerza normal</p>
 <p data-bbox="462 1433 722 1467">Soporte empotrado</p>	 <p data-bbox="949 1478 1344 1545">Tres componentes de fuerza, Tres componentes de par</p>

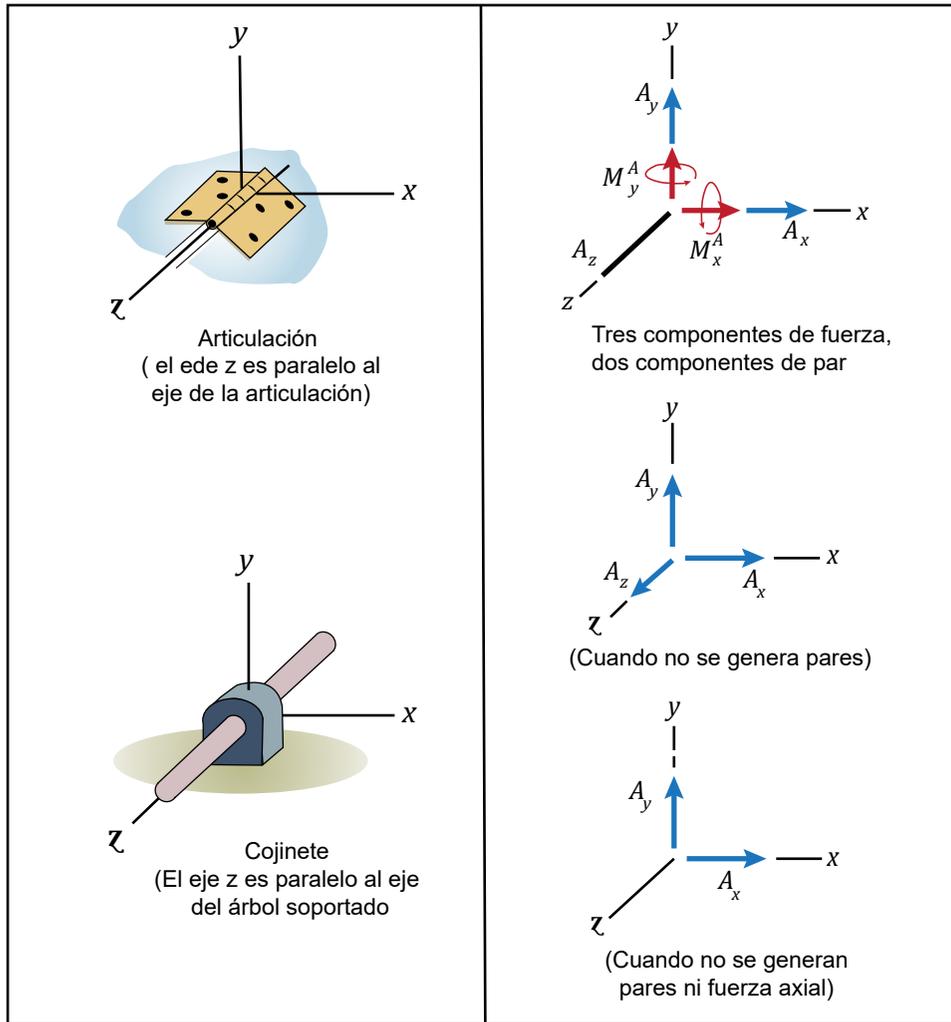


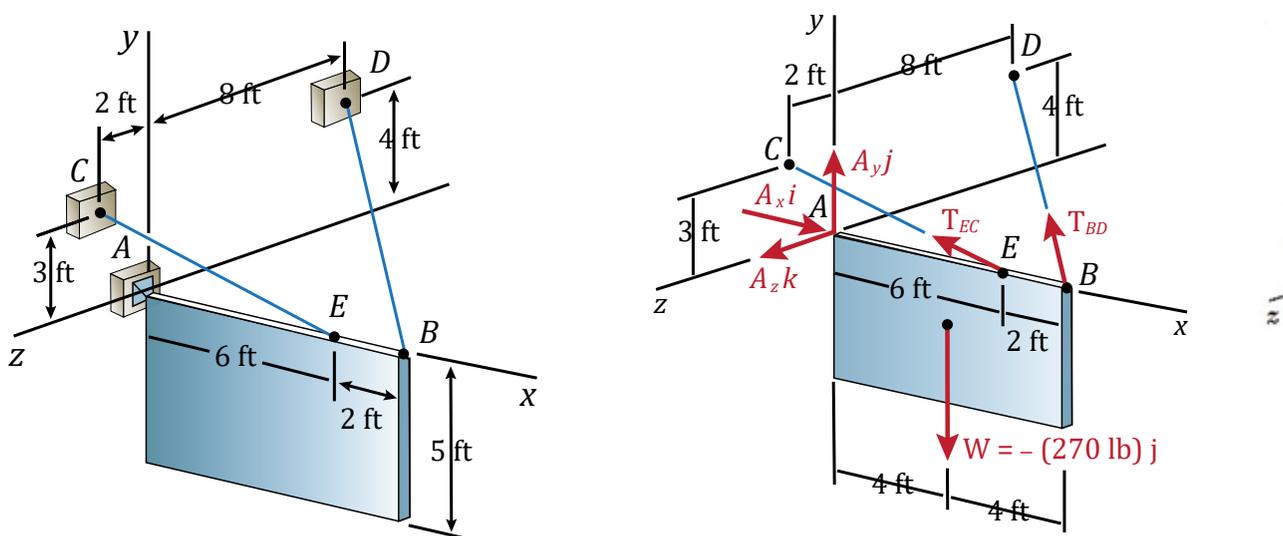
Figura 9. Soportes en tres dimensiones.

Fuente: Bedford, 2000, p. 243

Diagrama de cuerpo libre:

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido en tres dimensiones, procedemos en forma análoga al análisis en dos dimensiones con las consideraciones de los soportes tridimensionales.

Ejemplo: Para el letrero de densidad uniforme, apoyado en una rótula esférica en A y sujetado por cables en B y E.



2. Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el espacio

1. Elabore el diagrama de cuerpo libre.

- ✓ Establezca los ejes x , y y z en una orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Muestre las componentes desconocidas con un sentido positivo a lo largo de los ejes x , y y z .
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

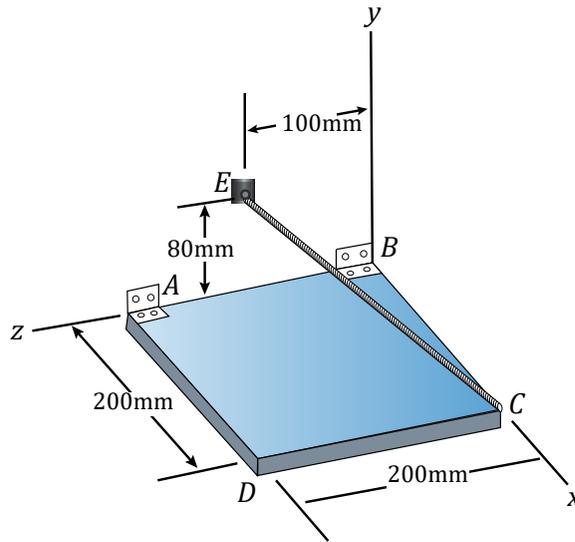
2. Aplique las ecuaciones de equilibrio.

- ✓ Según la conveniencia se deben aplicar las ecuaciones escalares o las ecuaciones vectoriales.
- ✓ En ocasiones serán necesarios usar ejes de dirección arbitraria para realizar la suma de fuerzas y momentos.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

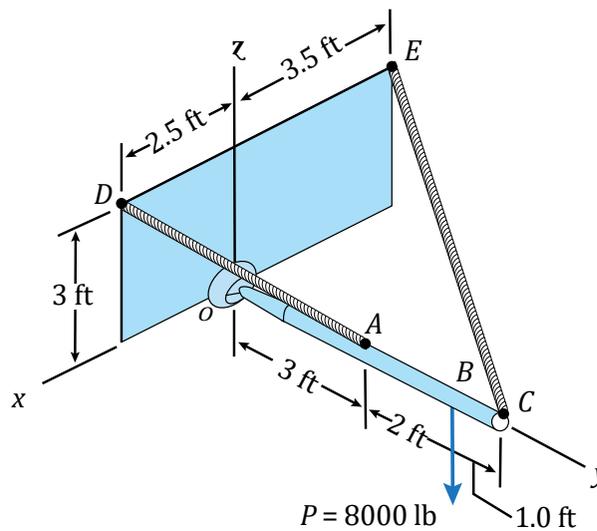
Actividad N.º 3

Resuelva ejercicios y problemas sobre equilibrio de cuerpos rígidos en tres dimensiones

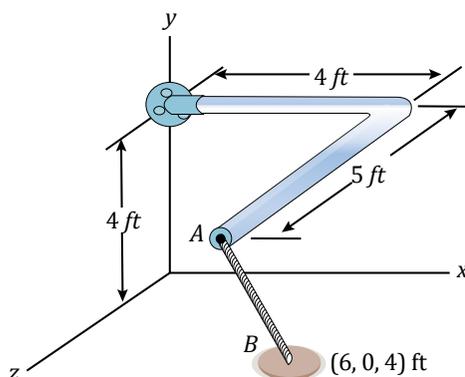
- En la figura la placa está soportada por bisagras en A y en B, también por el cable CE. Las bisagras, propiamente alineadas, no generan pares sobre la placa, y la bisagra en A no genera una fuerza sobre la placa en la dirección del eje de la bisagra. Además, la magnitud del momento de la tensión en la cuerda respecto al eje z no debe ser mayor de 337 Nm. Determine para tal condición el peso máximo de la placa que puede ser soportado por el sistema.



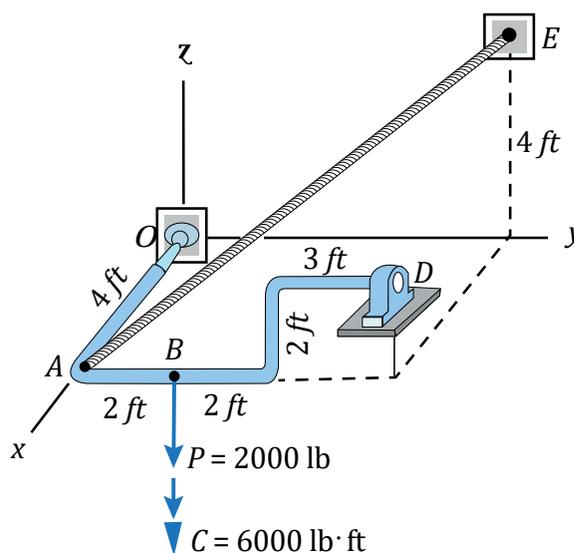
- El elemento horizontal de peso despreciable está sujeto por una rótula en O. Determine las magnitudes de las tensiones en los cables y la magnitud de la reacción en O.



3. La tensión en el cable AB es 800 lb. Determine las reacciones en el soporte empotrado en el punto C.



4. El elemento de peso despreciable es soportado por una rótula en O, un cable AE y un cojinete simple (que no genera pares). Sobre la barra actúan una fuerza P y un par C, ambos paralelos al eje x. Determine las magnitudes de las reacciones en D y en O, así como la tensión en el cable.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Centroides y centro de gravedad

Tema N.º4



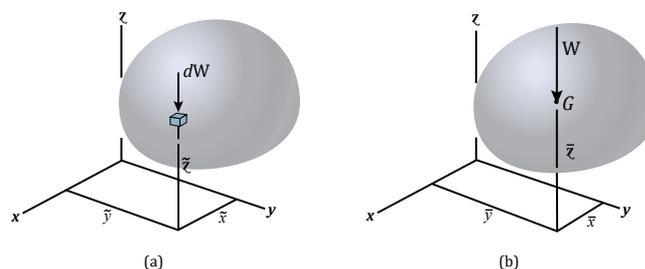
Figura 10. Estructura de almacenamiento.
Fuente: Hibbeler, 2013.

1. Introducción. Centro de gravedad y centroide de un cuerpo

A continuación, mostraremos en primer lugar cómo localizar el centro de gravedad para un cuerpo y después deduciremos que el centro de masa y el centroide de un cuerpo pueden desarrollarse con este mismo método.

Centro de gravedad

Un cuerpo está compuesto de un número infinito de partículas de tamaño diferencial y, por tal razón, si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso dW (figura a). Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa solo a través de un punto llamado el "centro de gravedad G " (figura b). Esto es cierto mientras se suponga que el campo de gravedad tiene la misma magnitud y dirección en todas partes. Ese supuesto es apropiado para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, ya que la gravedad no varía apreciablemente entre, por ejemplo, la parte inferior y la superior de un edificio.



Se sabe que el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir:

$$+ \downarrow F_R = \Sigma F_z; \quad W = \int dW$$

La ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje y , se determina al igualar el momento de W con respecto al eje y (figura b) con la suma de los momentos de los pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si dW se ubica en el punto $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ (figura a), entonces:

$$M_{R y} = \Sigma M_y; \quad \bar{x} W = \int \tilde{x} dW$$

De la misma manera, si se suman los momentos con respecto a los ejes x y y:

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad \bar{y}W = \int \tilde{y}dW$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{x}W = \int \tilde{x}dW$$

Luego, la ubicación del centro de gravedad G con respecto a los ejes x, y y z es la siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}dW}{\int dW} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}dW}{\int dW}$$

$$G = (x; y; z)$$

donde:

G = Centro de gravedad

x, y, z = Coordenadas del centro de gravedad

- ✓ El centro de gravedad toma en cuenta los materiales que componen el cuerpo y es el punto donde está aplicada la fuerza resultante equivalente llamada peso W.

Centro de masa:

Al sustituir $dW = g dm$ en la ecuación del centro de gravedad, obtenemos el centro de masa de un cuerpo. A fin de estudiar la respuesta dinámica o el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar este punto.

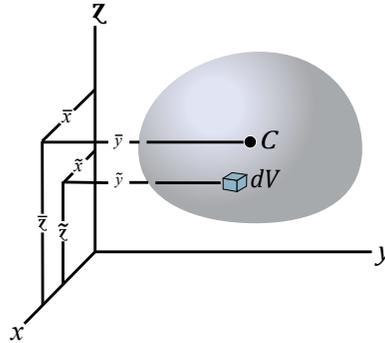
$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}dm}{\int dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}dm}{\int dm} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}dm}{\int dm}$$

2. Centros de gravedad y centroide en líneas, áreas y volúmenes

Centroide de un volumen

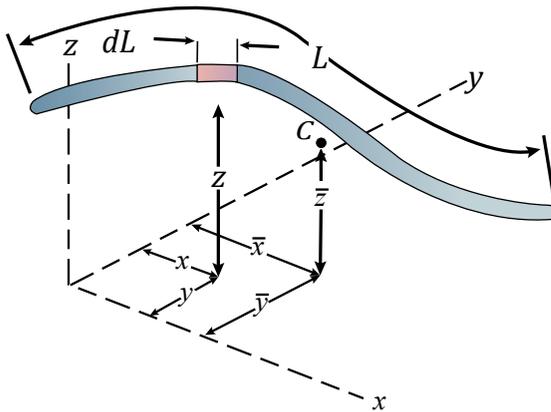
Si el cuerpo de la figura a está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad (ρ) será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen dV tiene una masa $dm=dV$. Al sustituir esto en las ecuaciones de centro de masa y al cancelar, obtenemos fórmulas que localizan el centroide C o centro geométrico del cuerpo así:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$



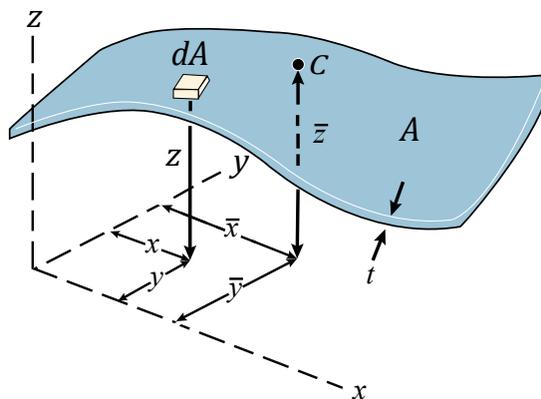
Centroides de líneas

Para alambres de sección constante.



$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} \quad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL}$$

Centro de gravedad de áreas:

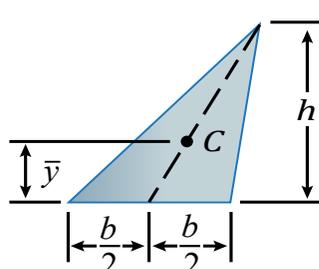
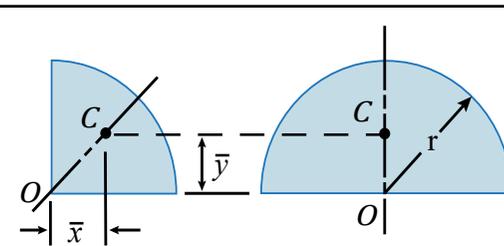
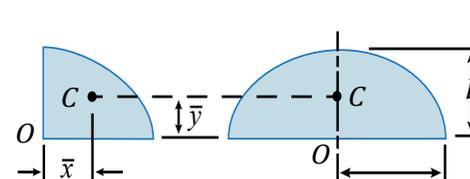
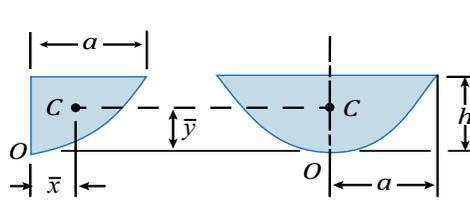


$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

Consideraciones importantes

- ✓ El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo, es una propiedad geométrica y no considera los materiales del cuerpo. El centro de gravedad es una propiedad física y considera los materiales que componen el cuerpo.
- ✓ Este punto coincide con el centro de masa o con el centro de gravedad solo si el material que compone el cuerpo es uniforme u homogéneo.
- ✓ Las fórmulas usadas para localizar el centro de gravedad o el centroide simplemente representan un balance entre la suma de momentos de todas las partes del sistema y el momento de la resultante para el sistema.
- ✓ En algunos casos, el centroide se ubica en un punto fuera del objeto, como en el caso de un anillo, donde el centroide está en el centro del anillo. Además, este punto se encontrará sobre cualquier eje de simetría del cuerpo.

3. Fórmulas de centroides de formas comunes de áreas y de líneas.

Forma		\bar{x}	\bar{y}	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

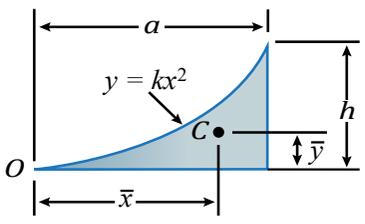
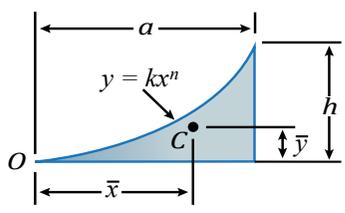
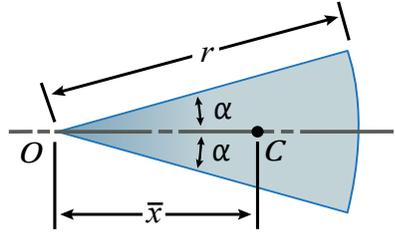
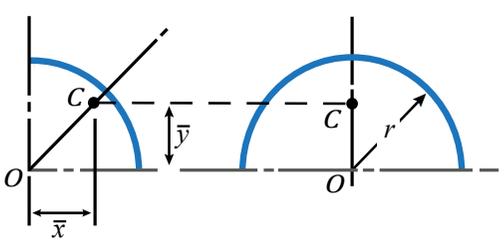
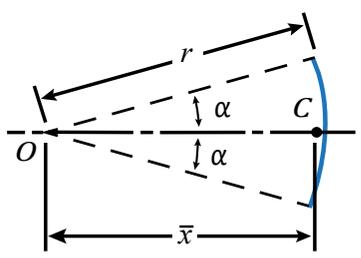
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Forma		\bar{x}	\bar{y}	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Figura 11. Centroides de figuras planas.

Fuente: Beer, 2013.

4. Determinación de centroides por integración

El centro de gravedad o centroide de un objeto o forma se puede determinar mediante integrales simples por el siguiente procedimiento:

1. Seleccionar un elemento diferencial

Seleccione un sistema coordenado apropiado, especifique los ejes coordenados y luego

elija un elemento diferencial para la integración: para líneas, dL ; para áreas, dA , con una longitud finita y ancho diferencial; para volúmenes, el elemento puede ser un disco circular de volumen dV , con un radio finito y espesor diferencial.

2. Expresar tamaño y brazos de momento

Expresé la longitud dL , el área dA o el volumen dV del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva. Expresé los brazos de momento para el centroide o centro de gravedad del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva.

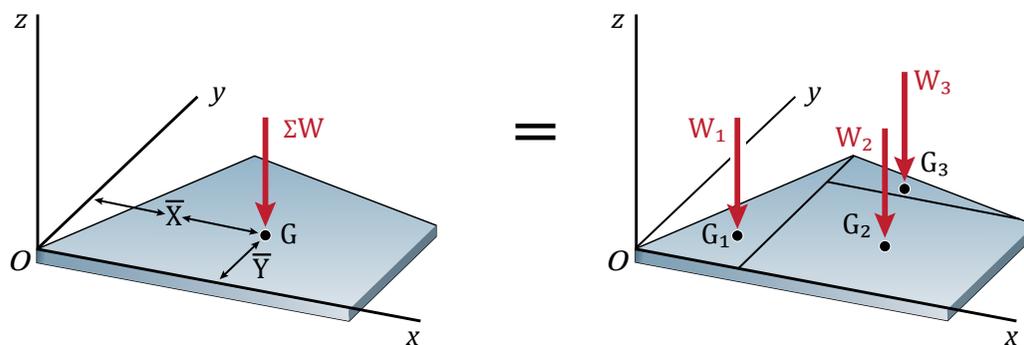
3. Integraciones.

Sustituya las formulaciones para dL , dA o dV en las ecuaciones apropiadas y exprese la función en él, integrando en términos de la misma variable aplicada al espesor del elemento. Los límites de la integral se definen a partir de las dos ubicaciones extremas del espesor diferencial del elemento, de manera que cuando los elementos se "suman" o la integración se realiza, toda la región queda cubierta.

5. Centro de gravedad de cuerpos compuestos

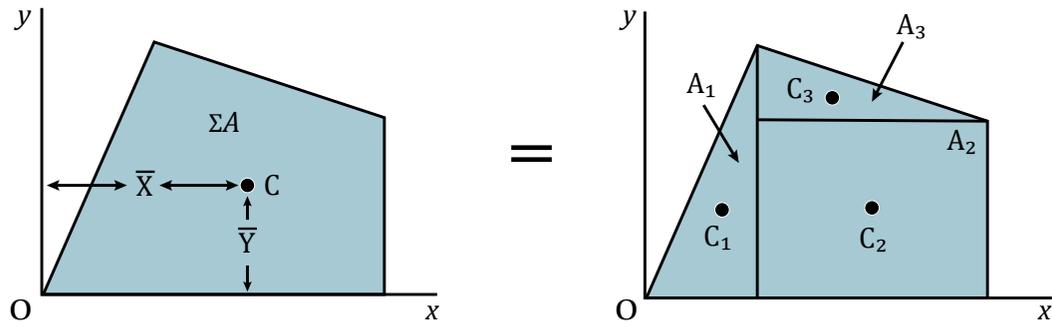
Un cuerpo compuesto consiste en una serie de cuerpos más simples conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etcétera. Un cuerpo de este tipo a menudo puede ser seccionado o dividido en sus componentes y, si se conocen el peso y la ubicación de cada una de esas partes, es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad de todo el cuerpo.

Veamos el caso de una placa mostrada en la figura siguiente:



Procedimiento para determinar el centroide de un cuerpo compuesto:

1. Separe el cuerpo en partes de formas conocidas.
2. Determine el centroide de cada parte por separado. Además, determine el área de cada parte y el área total.



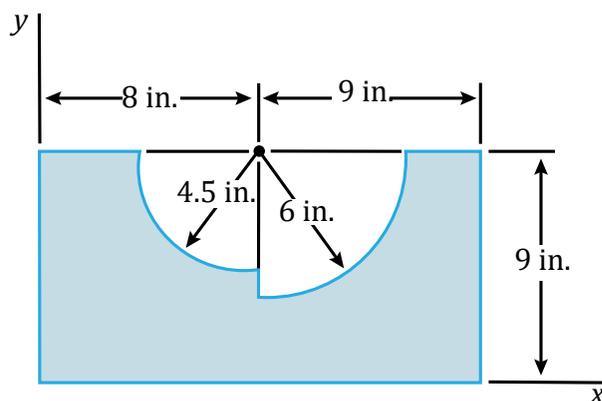
3. Las coordenadas del centroide C del cuerpo compuesto se determinan promediando los centroides de las partes.

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

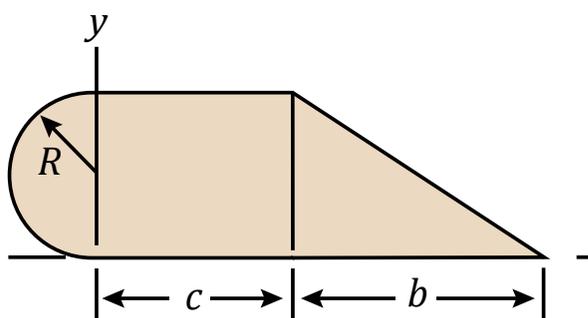
Actividad N.º 4

Determine el centro de gravedad y el centroide para un sistema de partículas discretas, y de un cuerpo de forma arbitraria.

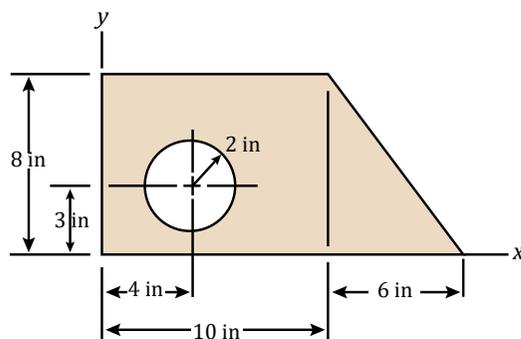
1. Localice el centroide del área plana mostrado en cada figura.



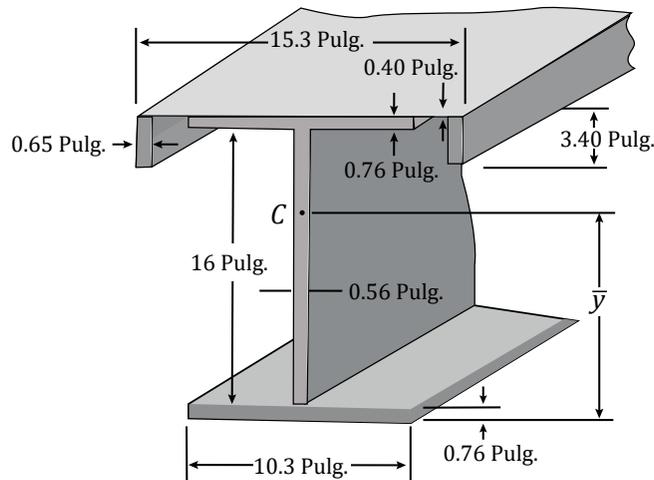
2. Localice el centroide del área plana si $r = 6$ in, $c = 14$ in y $b = 18$ in.



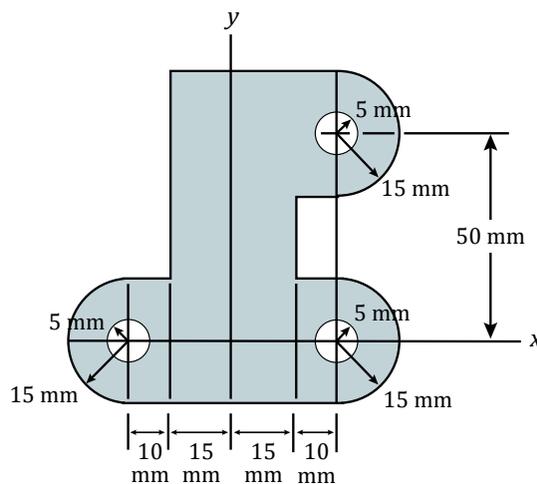
3. Determine las coordenadas del centroide.



4. Localice el centroide del área de sección transversal de la viga compuesta construida a partir de una canaleta y una viga de pañín ancho.



5. El muro de contención a gravedad está hecho de concreto. Determine la ubicación del centro de masa G para el muro.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Lectura seleccionada N.º 2: El canal de Panamá

Leer el apartado "La ruta del mundo" desde la página 27 hasta la página 46.

Congreso Canal de Panamá 2012. (2012). Epicentro de la ingeniería. El Faro, 48. Disponible en: <https://micanaldepanama.com/wp-content/uploads/2012/03/elfaro-20120401.pdf>



Glosario de la Unidad II

1. Centroide

Centro geométrico de un objeto.

2. Centro de gravedad

Punto en el cual se considera se aplica la fuerza denominada peso, de un cuerpo; dependiendo de su forma y constitución interna, es decir, el material.

3. Cuerpo homogéneo

Cuerpo en el cual la composición material interna es uniforme, por tanto el centroide y el centro de gravedad coinciden.

4. Cuerpo ingrávido

Cuerpo de peso despreciable, es decir, se considera nulo.

5. Diagrama de cuerpo libre

Representación gráfica de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, previamente aislado de superficies u otros cuerpos en contacto.

6. Sentido horario

Sentido convencional de rotación semejante al de las manecillas del reloj, es considerado como negativo.

7. Soporte

Modelos estilizados llamados convenciones de soporte, que representamos por medio de estos modelos a las uniones o conexiones de un cuerpo rígido entre sus elementos o de un cuerpo rígido con superficies u otros cuerpos.

8. Torque

Magnitud física vectorial que mide el efecto de rotación que origina una fuerza.



Bibliografía de la Unidad II

Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.

Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.

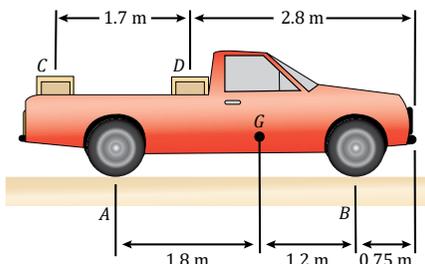
Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: Mc Graw-Hill.

Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.



Autoevaluación N.º 2

En la figura, la camioneta tiene una masa de 8000 kg, la caja izquierda 100 kg y la caja derecha 200 kg. Utilice $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.



1. Determine el momento de fuerza del peso de la caja izquierda, respecto al punto A.

- A. -735.75 N.m
- B. $+735.75 \text{ N.m}$
- C. -500.25 N.m
- D. $+500.25 \text{ N.m}$
- E. $+5 \text{ N.m}$

2. Determine del peso de la caja izquierda, respecto al punto A.

- A. $+1500 \text{ N.m}$
- B. -1863.9 N.m
- C. $+2000.5 \text{ N.m}$
- D. -2000 N.m
- E. $+50 \text{ N.m}$

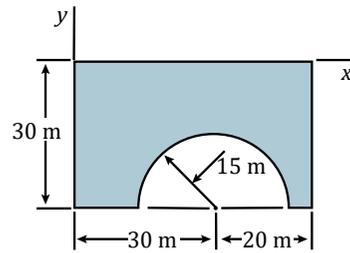
3. Determine la magnitud de la reacción del piso sobre las llantas traseras del auto.

- A. 2706.57 N
- B. $56\,875.33 \text{ N}$
- C. $33\,958.95 \text{ N}$
- D. 7583.3 N
- E. 4583.3 N

4. Determine la magnitud de la reacción del piso sobre las llantas delanteras del auto.

- A. 5000.2 N
- B. 6141.43 N
- C. 5556.3 N
- D. $47\,464.05 \text{ N}$
- E. $43\,916.76 \text{ N}$

A continuación, se muestra la sección transversal de la viga matriz de un ducto de ventilación.



5. Determine la coordenada en x del centroide de la región hueca semicircular.

- A. -10
- B. +10
- C. -20
- D. +20
- E. +30

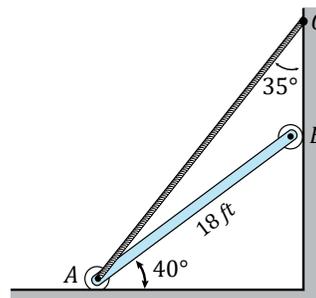
6. Determine la coordenada en y del centroide de la región rectangular.

- A. -15.0
- B. +1.74
- C. -20.34
- D. +1.65
- E. -1.35

7. Determine la coordenada en x del centroide de la sección de la viga.

- A. -21.75
- B. +23.46
- C. +1.67
- D. -1.67
- E. -2.36

Ahora tenemos la barra AB uniforme de 320 lb de peso descansa como se muestra en la figura, apoyada sobre rodillos lisos en A y en B .



8. Determine la magnitud de la reacción en el apoyo B.

- A. 190.7 lb
- B. 332.4 lb
- C. 47.68 lb
- D. 19.23 lb
- E. 199.7 lb

9. ¿Cuál es la magnitud de la tensión en la cuerda?

- A. 190.7 lb
- B. 332.4 lb
- C. 47.68 lb
- D. 19.23 lb
- E. 120.54 lb

10. Determine la magnitud de la reacción en el apoyo A.

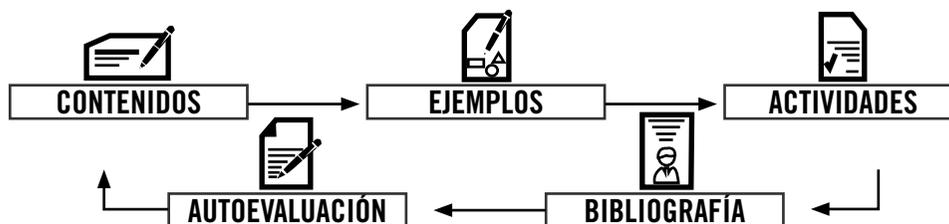
- A. 190.7 lb
- B. 332.4 lb
- C. 47.68 lb
- D. 19.23 lb
- E. 120.54 lb



UNIDAD III

FUERZAS DISTRIBUIDAS, ANÁLISIS ESTRUCTURAL Y FRICCIÓN

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD III



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Resultados del aprendizaje de la Unidad III: Al finalizar la unidad, el estudiante determina la magnitud y punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas distribuidas. Aplica las ecuaciones de equilibrio estático del cuerpo rígido a estructuras, determinando las reacciones en los apoyos o fuerzas axiales internas en los elementos. Analiza las características de la fuerza de fricción, con exactitud y precisión.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p>Tema N.º 1: Fuerzas distribuidas</p> <ol style="list-style-type: none"> Cargas distribuidas en vigas Fuerzas sobre superficies sumergidas <p>Tema N.º 2 : Análisis estructural I. Armaduras</p> <ol style="list-style-type: none"> Armaduras simples Análisis de armaduras mediante el método de los nudos Análisis de armaduras mediante el método de secciones <p>Tema N.º 3 : Análisis estructural II. Armazones y máquinas</p> <ol style="list-style-type: none"> Análisis de un armazón Armazones que dejan de ser rígidos cuando se separan de sus soportes Máquinas <p>Tema N.º 4 : Fricción</p> <ol style="list-style-type: none"> Leyes de la fricción seca Coefficientes de fricción, ángulo de fricción <p>Lectura seleccionada N.º 3: La gran represa china.</p> <p>Autoevaluación de la Unidad III</p>	<ol style="list-style-type: none"> Utiliza un método para encontrar la resultante de una carga general distribuida. Calcula la fuerza resultante de una carga de presión de un fluido. <p>Actividad N.º 1 Desarrolla ejercicios propuestos sobre fuerzas distribuidas.</p> <ol style="list-style-type: none"> Utiliza el método de los nudos o el método de las secciones para determinar las fuerzas que actúan en las barras de una armadura. <p>Actividad N.º 2 Resuelve ejercicios y problemas sobre análisis de armaduras.</p> <ol style="list-style-type: none"> Aplica las ecuaciones de equilibrio al análisis de armazones, determinando las fuerzas en la totalidad de estas estructuras, así como en sus miembros individuales. Determina las fuerzas que actúan sobre los elementos de máquinas. <p>Actividad N.º 3 Resuelve ejercicios y problemas sobre armazones y máquinas.</p> <ol style="list-style-type: none"> Analiza las características de la fricción seca. Analiza la fricción en ruedas. <p>Actividad N.º 4 Resuelve ejercicios y problemas sobre fricción seca.</p> <p>Control de lectura N.º 2 Se aplicará una prueba de selección múltiple de los temas de la Unidad.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Valora la importancia del diseño de elementos estructurales, en el cual el análisis de fuerzas internas juega un papel primigenio. Muestra interés en analizar situaciones más reales de interacción entre cuerpos gracias al análisis de la fricción seca y por rodadura.

Fuerzas distribuidas

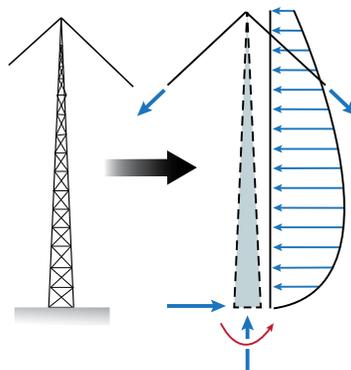
Tema N.º1



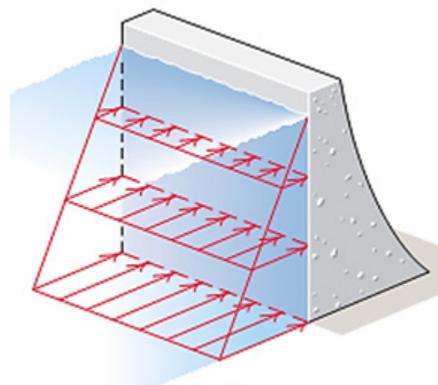
Figura 12. Presa Grand Wall USA.

Fuente: Mc Graw Hill Structures and Steel, 2013.

En este tema veremos que existen situaciones en las que un cuerpo puede estar sometido a una carga que se encuentra distribuida por toda su superficie. Por ejemplo, la presión del viento sobre la superficie de un señalamiento, la presión del agua dentro de un tanque o en una presa como en la fotografía previa, o el peso de la arena sobre el piso de un contenedor de almacenaje, son todas cargas distribuidas. La presión ejercida sobre cada punto de la superficie indica la intensidad de la carga. Esta se mide por pascuales Pa (o N/m^2) en unidades SI o lb/pie^2 en el sistema de uso común en Estados Unidos.



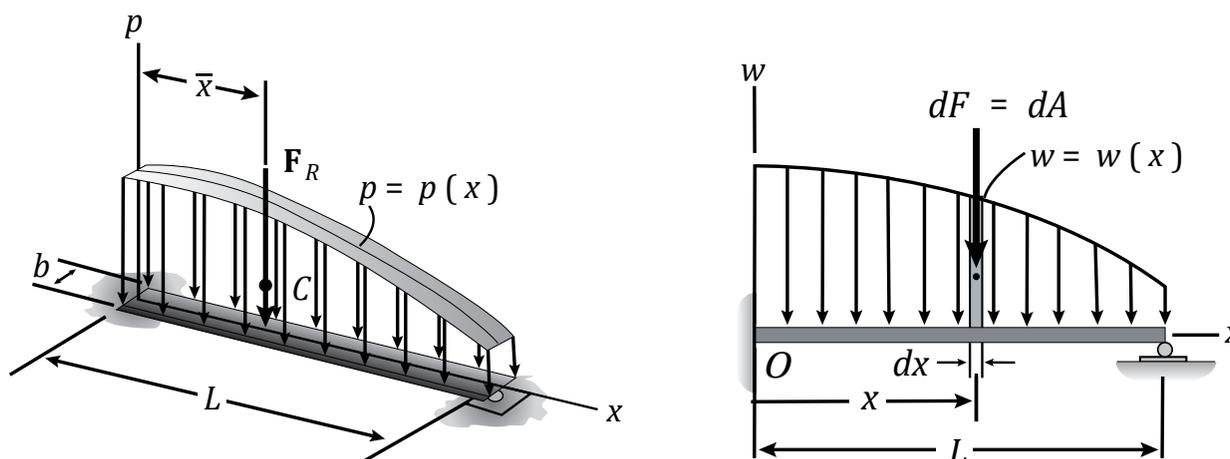
Carga distribuida de viento sobre la torre



Carga distribuida del agua sobre la pared de la presa

1. Carga uniforme a lo largo de un solo eje. Cargas en vigas

Si la viga de la figura es de ancho constante y está sometida a una carga de presión que actúa solo a lo largo del eje x , esta carga se puede describir como una función $p = p(x)$ en N/m^2 y se puede representar como una carga distribuida coplanar y se cumple que $w(x) = p(x) b$. Este sistema de fuerzas paralelas se puede representar por una fuerza equivalente F_R que actúa en una ubicación específica sobre la viga.



Magnitud de la carga distribuida

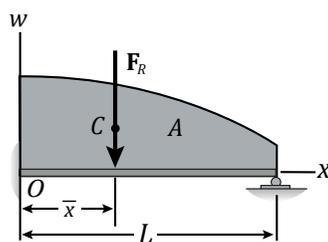
La fuerza resultante que representa la carga distribuida es equivalente al área bajo el diagrama de carga.

$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

Ubicación de la carga distribuida

Esta coordenada en el eje x ubica el centroide C del área bajo la curva:

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

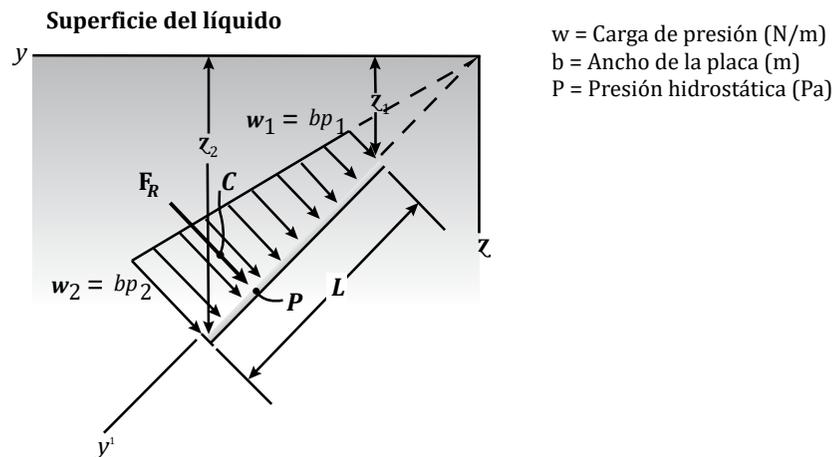
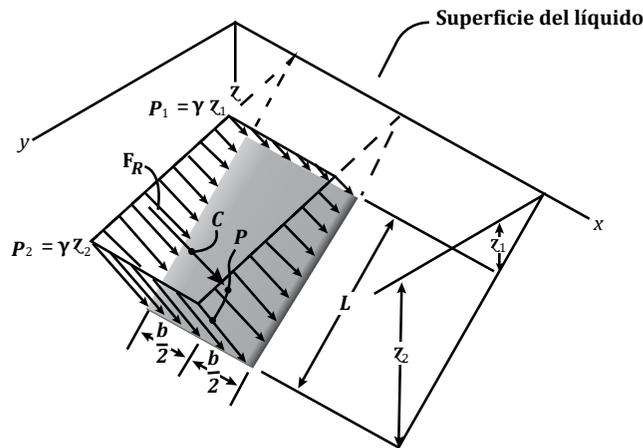


2. FUERZAS SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

La presión medida como fuerza por unidad de área depende del peso específico y la profundidad desde la superficie del líquido. La presión actúa en forma perpendicular al área superficial que se localiza en un punto especificado. La fuerza resultante ejercida por efectos de la presión sobre cuerpos sumergidos se puede determinar con un procedimiento similar al de la sección anterior.

Fuerza sobre una placa plana de ancho constante

- ✓ Magnitud de la fuerza resultante:
- ✓ Vista en dos dimensiones es igual al área trapezoidal.
- ✓ Ubicación de la fuerza resultante:
- ✓ En la línea de acción pasa por el centroide C del área y actúa en un punto P llamado "centro de presión".



$$F_R = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)L$$

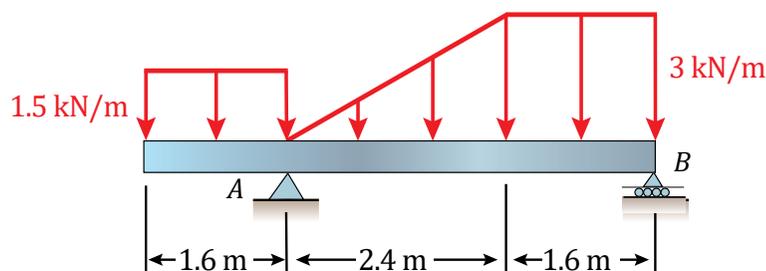
Donde la carga de presión es :

$$w = b p$$

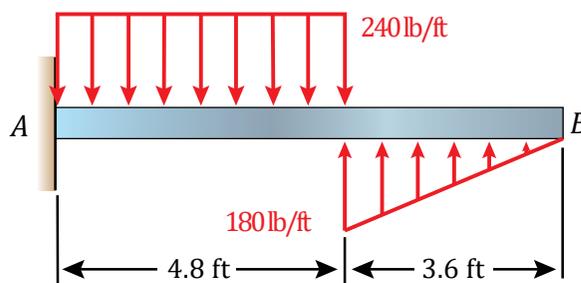
Actividad N.º 1

Determine la fuerza equivalente a un sistema de fuerza distribuida.

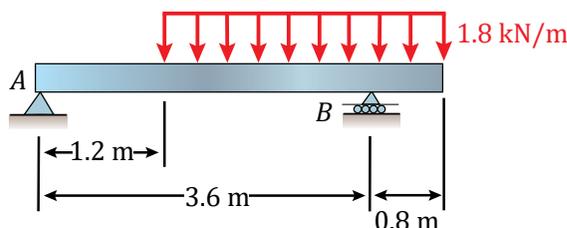
1. Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de cada viga.



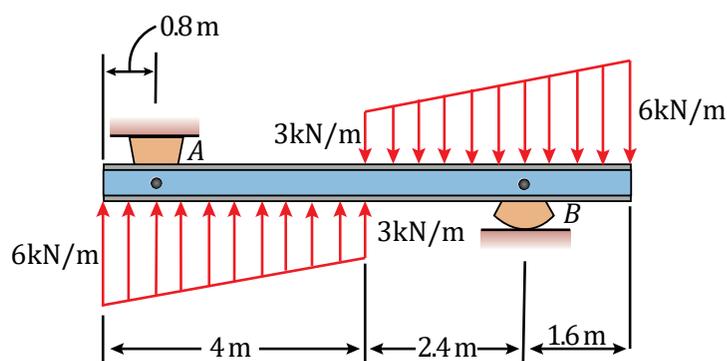
2. Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de cada viga.



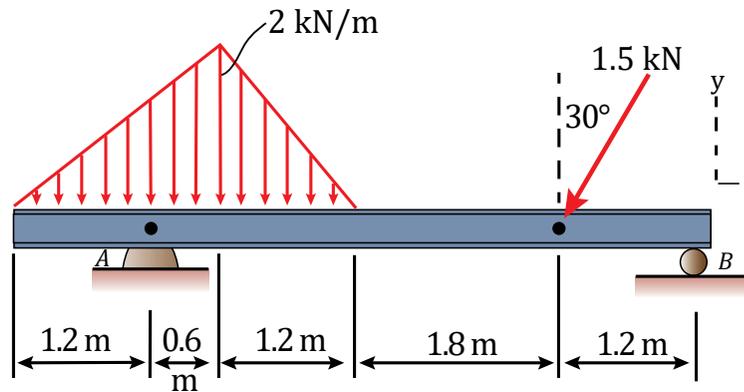
3. Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de cada viga.



4. Calcule las reacciones de apoyo en A y B para la viga sometida a las dos cargas distribuidas linealmente.



5. Calcule las reacciones en A y B para la viga sometida a la combinación de carga distribuida y carga puntual.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: Mc Graw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Análisis estructural de armaduras

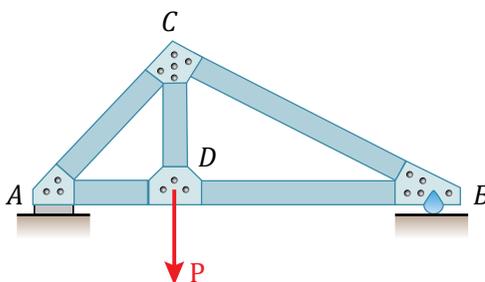
Tema N.º2



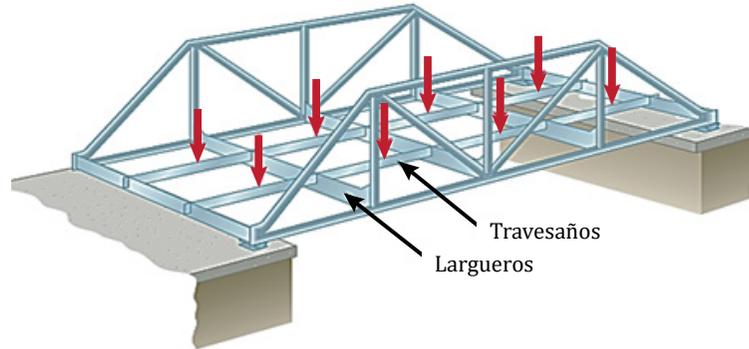
Figura 13. Puente Sawn Bridge – Canberra, Australia.

Fuente: Mc Graw Hill Structures and Steel, 2013.

Uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería es la armadura. Esta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos (Beer, 2013). Los elementos de la armadura solo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura no existe un elemento AB , en su lugar existen dos elementos distintos AD y DB . La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.



Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y solo pueden soportar cargas laterales pequeñas. Por eso, todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual transmite la carga a los nodos mediante el uso de travesaños y largueros. Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos. Cada elemento de una armadura puede considerarse como un elemento a dos fuerzas.



Armaduras típicas

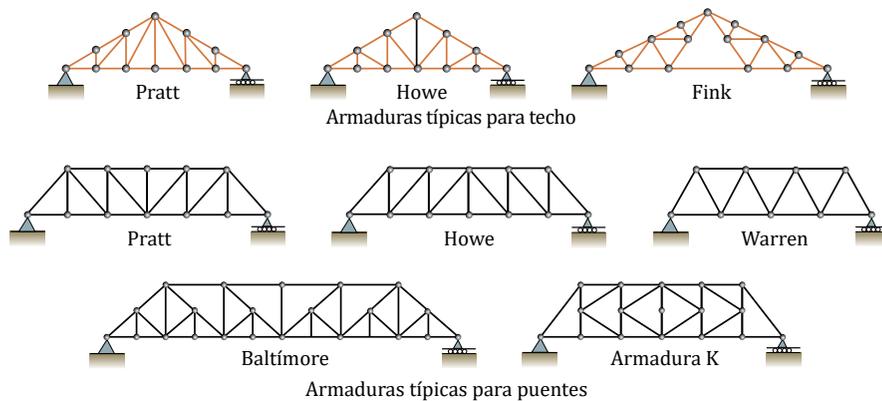


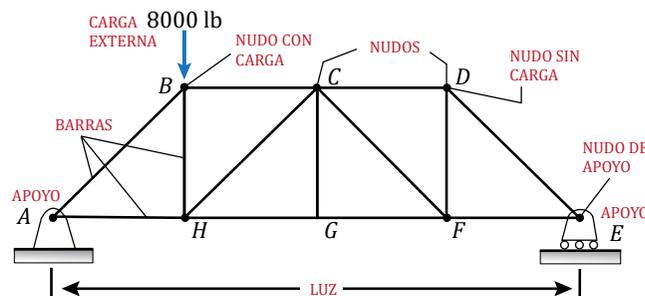
Figura 14: Tipos de armaduras.
 Fuente: Beer, 2013.

1. Armaduras simples

Estas armaduras consisten de sistemas formados básicamente de tres barras unidas por pasadores en sus extremos. Para fabricar armaduras cada vez más grandes, primero se colocan estas tres barras para formar triángulos y se agregan dos nuevas barras por cada nuevo nudo. La experiencia verifica que una configuración triangular es la mejor forma de disponer las barras para soportar cargas sin desplomarse, es decir, se obtiene un sólido rígido estable.

Armadura plana: Es aquella en la cual las barras y demás elementos de la armadura están contenidos en un mismo plano.

Elementos de una armadura

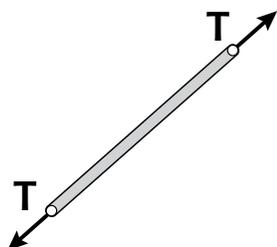


- ✓ Barras o elementos: AB, BC, AH, BH, \dots
- ✓ Nudos o nodos: A, B, C, H, \dots

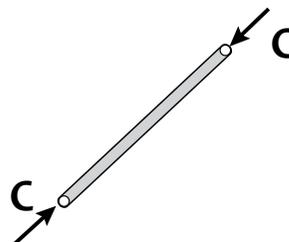
2. Fuerzas en una armadura

Los elementos de estas estructuras están sometidos a dos fuerzas iguales y opuestas dirigidas a lo largo del elemento, es decir, a fuerzas axiales. Estas pueden ser tracción o compresión.

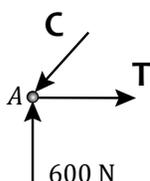
ELEMENTO A TENSIÓN O TRACCIÓN



ELEMENTO A COMPRESIÓN



Si graficamos las fuerzas en un nudo:

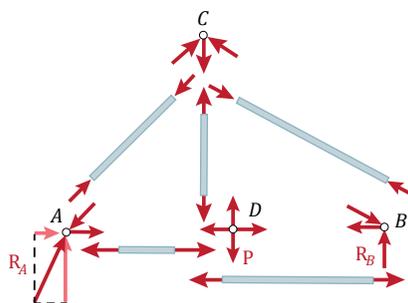


C = Compresión (entrante)

T = Tensión (saliente)

3. Análisis de armaduras mediante el método de nudos:

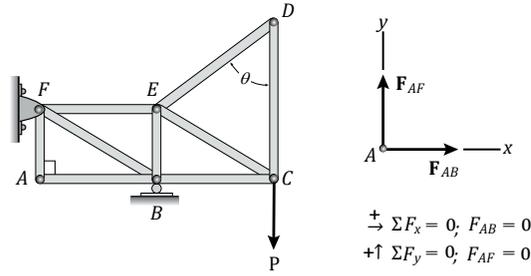
- Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa.
- Se escoge un nudo donde no existan más de dos fuerzas desconocidas, se grafica el DCL y se aplican las condiciones de equilibrio de fuerzas: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$.
- Se escoge otro nudo verificando las condiciones del paso anterior y aplicando las condiciones de equilibrio; así se continúa sucesivamente hasta determinar las fuerzas en todas las barras.



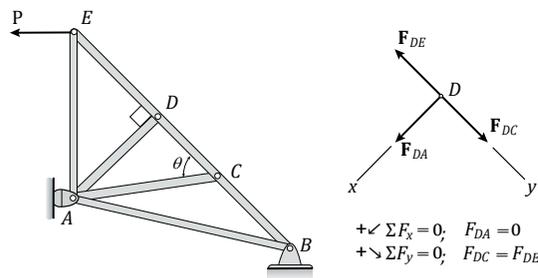
Miembros de fuerza cero

El análisis de armaduras podría simplificarse en algunos casos si se identifica qué miembros no soportan carga. Esos miembros de fuerza cero se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y para proporcionar soporte si la carga aplicada se modifica. Normalmente se pueden identificar estos elementos por simple inspección.

1. Nudo sin carga formado por dos elementos no colineales.



2. Nudo sin carga formado por tres elementos, dos de ellos colineales.

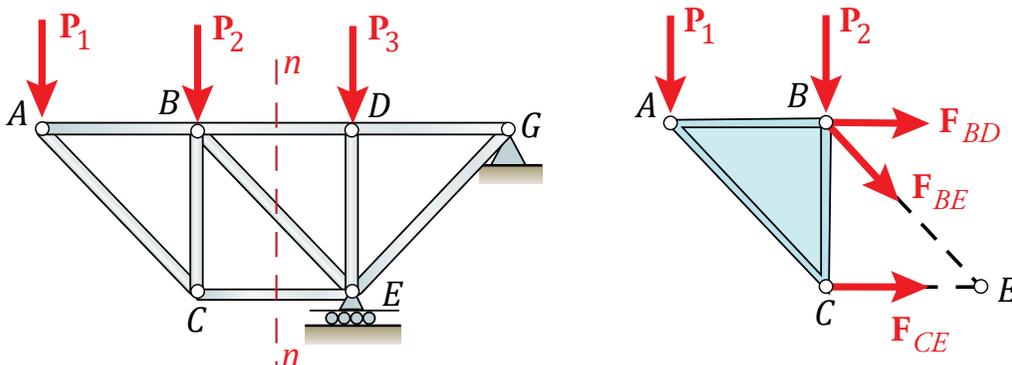


4. Análisis de armaduras mediante el método de secciones

Cuando se quiere determinar las fuerzas en solo algunos elementos de la armadura, se procede más rápido con el método de las secciones.

- Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa.
- Se dibuja una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas, pero que no interseque a más de tres elementos. Cualquiera de las dos secciones de la armadura que obtenga después de que los elementos intersecados han sido removidos puede usarse como cuerpo libre.
- En la sección elegida se deben graficar las fuerzas externas, reacciones en apoyos si los hubiera y las fuerzas internas en las barras cortadas.
- Se aplican las condiciones del equilibrio a la sección elegida ($\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$), determinando así las fuerzas en las barras que se desean analizar.

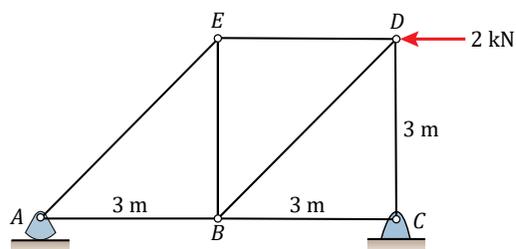
En ocasiones se requieren hacer varios cortes para obtener resultados esperados.



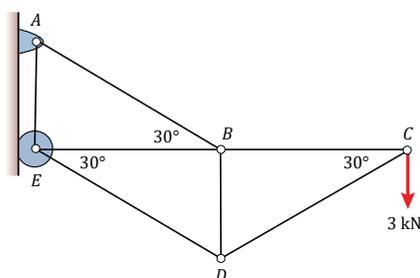
Actividad N.º 2

Determine la fuerza axial en cada miembro de la armadura.

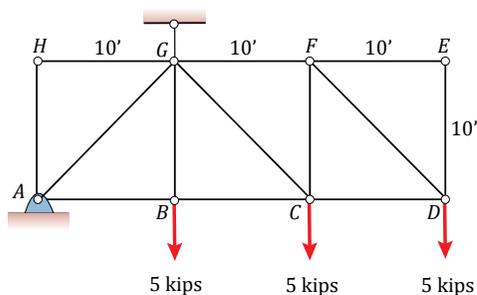
1. Determine las fuerzas axiales en los miembros de la armadura.



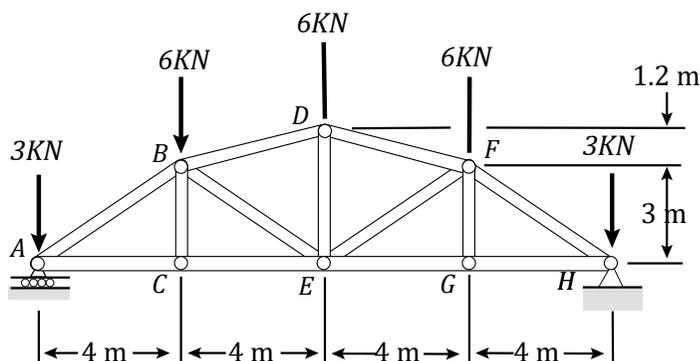
2. Determinar las fuerzas axiales en los miembros de la armadura.



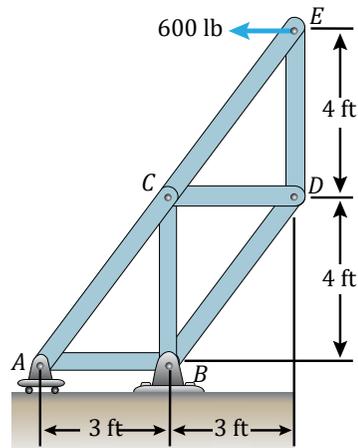
3. Determine la fuerza axial GC e indique si trabaja a tensión o a compresión.



4. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura Gambrel para techo. Para cada elemento establezca si este se encuentra en tensión o en compresión.



5. Utilice el método de las secciones para determinar las fuerzas axiales en los miembros de AC, BC, y BD.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Lectura seleccionada N.º 4: El puente de la bahía de Sidney

MEGACONSTRUCCIONES.NET (s.f.). Puente de la bahía de Sídney. Disponible en: <https://goo.gl/wTW3J8>

Análisis estructural, armazones y máquinas

Tema N.º3

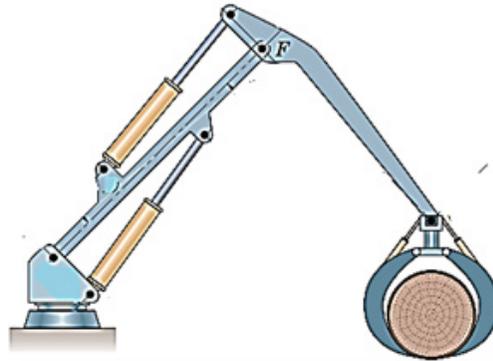


Figura 15. Máquina de elevación.

Fuente: Meriam, 2010.

Muchas estructuras, como el bastidor de un automóvil y la estructura humana de huesos, tendones y músculos, no están compuestas enteramente de miembros de dos fuerzas y no se pueden representar como armaduras. En esta sección consideraremos estructuras de miembros interconectados que no satisfacen la definición de una armadura. Estas estructuras se denominan armazones si están diseñadas para permanecer en reposo al soportar cargas, es decir, son totalmente restringidas, y máquinas si están diseñadas para moverse y aplicar cargas. Las máquinas pueden ser estacionarias o no.

1. Análisis de un armazón

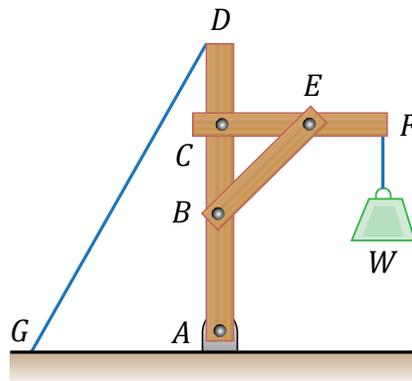
Los elementos que conforman un armazón o una máquina están unidos generalmente por pasadores. Estas conexiones generan una reacción cuya dirección es desconocida y, por ello, se descompone en una fuerza horizontal y una fuerza vertical en cada conexión. A diferencia de las armaduras, las fuerzas se presentan no solo en sus pasadores, sino también en cualquier punto de los elementos.

Siempre que un bastidor o una máquina no contengan más soportes o elementos que los necesarios para evitar el colapso, las fuerzas que actúan en las uniones y soportes pueden determinarse si se aplican las ecuaciones de equilibrio a cada uno de sus elementos. Una vez obtenidas las fuerzas en las uniones, es posible diseñar el tamaño de los elementos, conexiones y soportes al aplicar la teoría de la mecánica de materiales y un código de diseño de ingeniería adecuado.

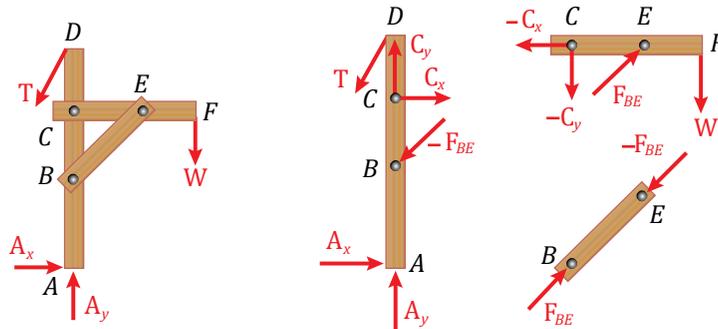
2. Procedimiento para determinar las fuerzas en los elementos de un bastidor

1. Análisis de la estructura completa: Para determinar las reacciones en los soportes.
 - Dibuje el DCL de la estructura completa.
 - Aplique las condiciones de equilibrio: $\Sigma F=0$ y $\Sigma M=0$.
2. Análisis de los elementos por separado: Para determinar las fuerzas que actúan sobre ellos.
 - Identifique los elementos a dos fuerzas.
 - Dibuje el DCL de cada parte.
 - Aplique las condiciones de equilibrio $\Sigma F=0$ y $\Sigma M=0$ a los elementos que sean necesarios para el análisis.

Ejemplo de análisis del equilibrio mediante fuerzas en un bastidor.



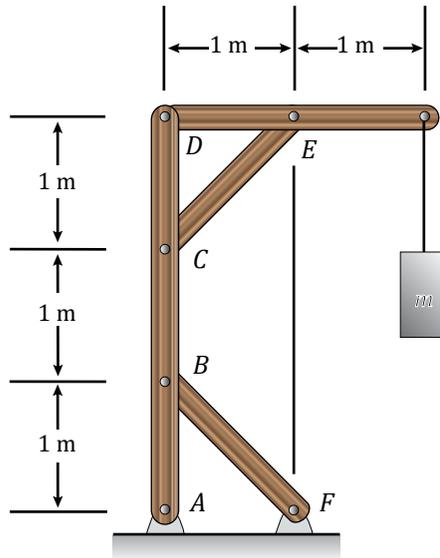
En primer lugar, se tiene el DCL del bastidor completo y a continuación el DCL de cada elemento por separado. Note el caso particular de elemento a dos fuerzas (miembro BE).



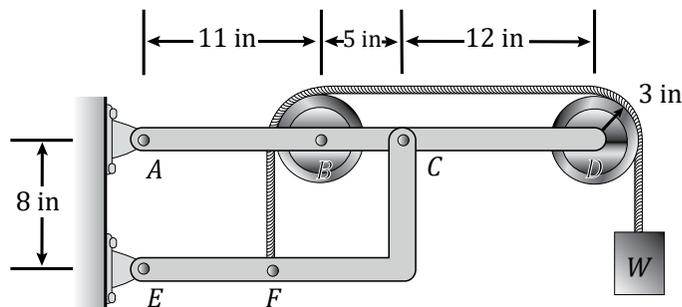
Actividad N.º 3

Determine las fuerzas entre los elementos de un armazón o de una máquina.

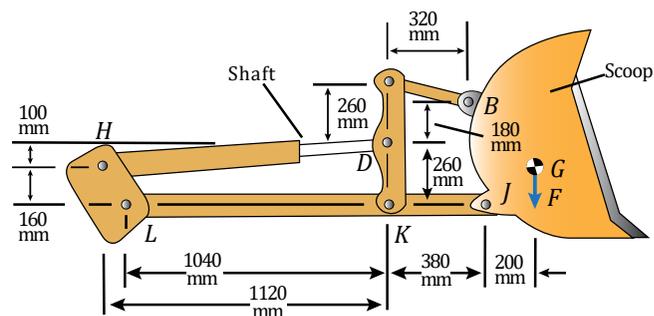
1. La masa del bloque es de 50 kg. Determine las fuerzas sobre el miembro ABCD.



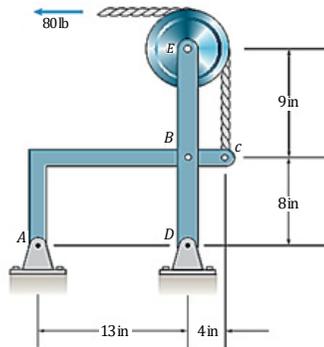
2. Determine las fuerzas en el miembro ABCD si el peso es de valor 80 lb.



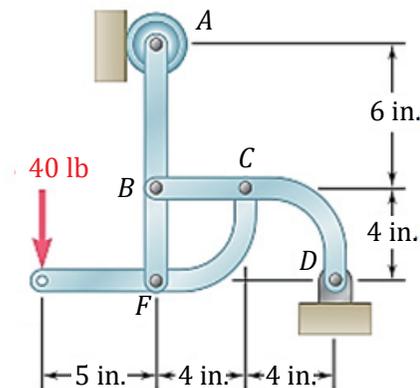
3. La estructura mostrada en el diagrama (una de las dos estructuras idénticas que soporta la cuchara de la excavadora) soporta una fuerza $F = 1800 \text{ N}$ en G. Los miembros BC y DH pueden considerarse como elementos de dos fuerzas. Determine la reacción en K en el miembro CDK.



4. Determine las fuerzas en el elemento ABC.



5. Para el bastidor mostrado, despreciando el peso de los elementos, determine las magnitudes de las fuerzas en el elemento CFE en C y F.

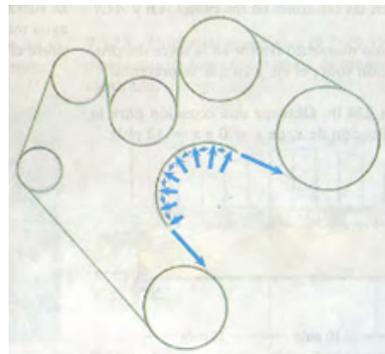
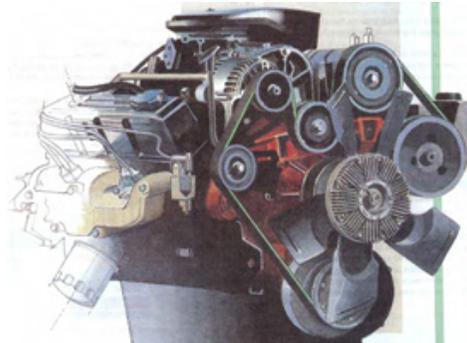


NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Fricción

Tema N.º4



Fuente: Bedford, 2000, p. 500.

En este tema estudiaremos la fricción, previamente veamos un caso especial. Se sabe que parte de la potencia producida por el motor de un automóvil es transformada por bandas y poleas que impulsan el alternador y la bomba de refrigeración. Para diseñar una banda y determinar el par de torsión máximo que puede ejercer, es necesario analizar las fuerzas de fricción que tienen lugar en las superficies de contacto entre ella y la polea.

Además, en el presente tema aprenderemos que las fuerzas de fricción tienen muchos efectos importantes, tanto deseables como indeseables, en las aplicaciones del campo de la ingeniería. Por ejemplo, "el funcionamiento adecuado de un automóvil depende de las fuerzas de fricción entre sus neumáticos y el suelo, y entre las bandas y las poleas de su motor, pero la fricción entre sus pistones y cilindros ocasiona un desgaste que se debe minimizar por medio de algún lubricante. En algunos casos hemos visto que las fuerzas de fricción se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio" (Bedford, 2000, p. 503).

1. Análisis de la fricción seca

Iniciamos analizando la teoría de la fricción de Coulomb que nos permite calcular la fuerza de fricción máxima que se puede ejercer entre superficies en contacto y la fuerza de fricción ejercida por superficies deslizantes. Esto nos permite el análisis de nuevos e importantes tipos de soportes y máquinas, incluidas cuñas, conexiones roscadas, chumaceras y bandas (Bedford, 2000, p. 504).

Se observa que cuando una persona sube por una escalera, esta permanece en reposo por la fuerza de fricción ejercida por el piso (figura a). Si se permanece quieto sobre la escalera, las ecuaciones de equilibrio determinan la fuerza de fricción. Sin embargo, hay una cuestión impor-

tante que no puede aclararse solo con las ecuaciones de equilibrio: ¿permanecerá la escalera en reposo o resbalará sobre el piso? Si un camión se estaciona sobre un terreno inclinado, la fuerza de fricción ejercida sobre él por el terreno impide que se deslice cuesta abajo (figura b). Surge otra pregunta: ¿qué pendiente máxima puede tener el terreno sin que el camión estacionado se deslice?

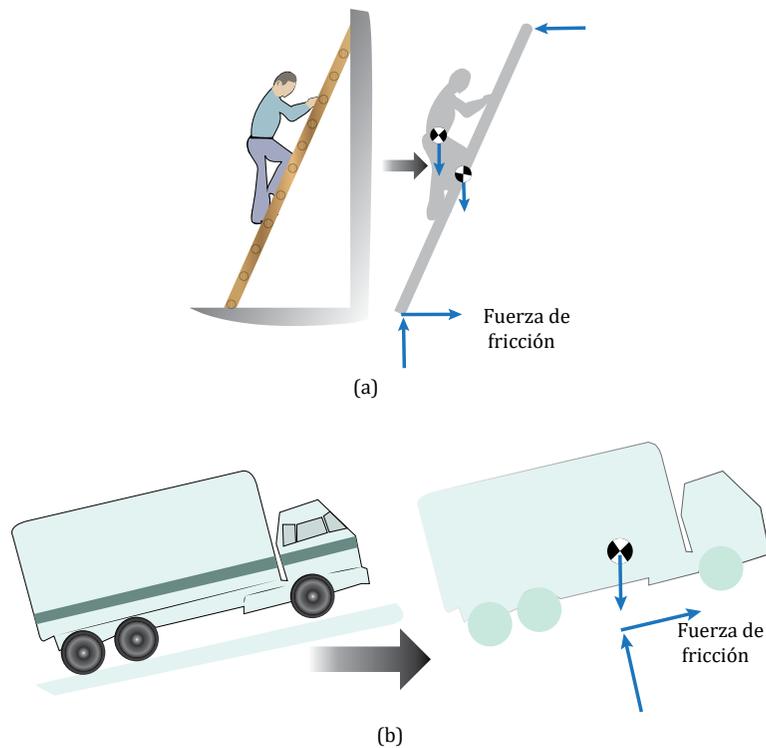


Figura 16. Ejemplos de fricción.
 Fuente: Bedford, 2000, p. 504.

Para responder estas preguntas, debemos examinar con mayor detalle la naturaleza de las fuerzas de fricción. Coloque un libro sobre una mesa y empújelo con una pequeña fuerza horizontal (figura 17a). Si la fuerza que usted ejerce es suficientemente pequeña, el libro no se moverá. En la figura 2b se muestra el diagrama de cuerpo libre. La fuerza W es el peso del libro y N es la fuerza normal ejercida por la mesa. La fuerza F es la fuerza horizontal que se aplica y f es la fuerza de fricción ejercida por la mesa. Como el libro está en equilibrio, $f = F$. (Bedford, 2000, p. 504).



Figura 17. Análisis de fricción.
 Fuente: Bedford, 2010.

Ahora incremente con lentitud la fuerza sobre el libro. Mientras este permanezca en equilibrio, la fuerza de fricción debe aumentar en forma correspondiente, ya que es igual a la fuerza que se aplica. Cuando esta llega a ser muy grande, el libro se deslizará sobre la mesa. Después de alcanzar cierto valor máximo, la fuerza de fricción ya no es capaz de mantener el libro en equilibrio. Observe también que la fuerza necesaria para mantener al libro en movimiento es menor que la requerida para que empiece a deslizarse (usted estará familiarizado con este fenómeno si alguna vez trató de empujar un mueble sobre el piso). ¿Cómo ejerce la mesa una fuerza de fricción sobre el libro? ¿Por qué este se desliza? ¿Por qué para mantenerlo en movimiento se requiere una fuerza menor que para empezar a deslizarlo? Si las superficies de la mesa del libro se amplifican suficientemente, adquieren un aspecto rugoso (figura 17). Las fuerzas de fricción surgen en parte debido a las rugosidades o asperezas de las superficies en contacto. A escala aún menor, las superficies tienden a formar enlaces atómicos que las adhieren entre sí (figura 18). La última pregunta planteada arriba explica, en parte, la necesidad de romper esos enlaces antes de que pueda comenzar el deslizamiento (Bedford, 2000, pp. 504-505).

También existe una teoría que predice los fenómenos básicos que hemos descrito y que ha resultado útil para representar, en aplicaciones de ingeniería, las fuerzas de fricción entre superficies secas (la fricción entre superficies lubricadas es un fenómeno hidrodinámico que debe analizarse en el contexto de la mecánica de fluidos).

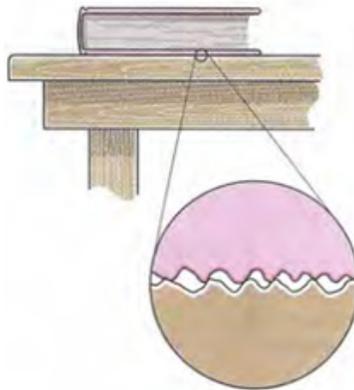


Figura 18. Rugosidades de las superficies en forma ampliada.

Fuente: Bedford, 2000, p. 505.

2. Coeficientes de fricción

“La teoría de la fricción seca, o fricción de Coulomb, predice las fuerzas de fricción máximas que pueden ser ejercidas por superficies secas en contacto y que se hallan en reposo entre sí. También predice las fuerzas de fricción ejercidas por las superficies cuando estas se hallan en movimiento relativo, es decir, deslizándose unas con respecto a otras” (Bedford, 2000, p. 509)

El coeficiente estático: La magnitud de la fuerza de fricción máxima que se puede ejercer entre dos superficies planas secas en contacto es

$$f = u_s N$$

donde N es la componente normal de la fuerza de contacto entre las superficies y u_s es una constante llamada coeficiente de fricción estática. Se supone que el valor de u_s depende solo de los materiales de las superficies en contacto de sus condiciones (lisura grado de contaminación por otros materiales). En la tabla siguiente se muestran valores típicos de u_s para varios materiales. El intervalo relativamente grande de valores para cada par de materiales refleja la sensibilidad de u_s respecto a las condiciones de las superficies. En las aplicaciones de ingeniería

suele ser necesario medir el valor de u_s de las superficies consideradas.

Tabla: Valores típicos del coeficiente de fricción estática

Materiales en contacto	Coefficiente de fricción estática μ_s
Metal sobre metal	0.15 – 0.20
Mampostería sobre mampostería	0.60 – 0.70
Madera sobre madera	0.25 – 0.50
Metal sobre mampostería	0.30 - 0.70
Metal sobre madera	0.20 – 0.60
Hule sobre concreto u hormigón	0.50 – 0.90

Fuente: Bedford, 2000, p. 503.

Volvamos al ejemplo de la figura 2. Si la fuerza F sobre el libro es tan pequeña que este no se mueve, la condición de equilibrio indica que la fuerza de fricción $f = F$. ¿Para qué necesitamos la teoría de la fricción seca? Si se incrementara la fuerza, aumentaría hasta que el libro se deslice. La ecuación (1) da la fuerza de fricción máxima que las dos superficies pueden ejercer y, por ende, la fuerza máxima F que se puede aplicar sin que el libro se deslice. Si se conoce el coeficiente de fricción estática u_s entre el libro y la mesa y el peso W del libro, como la fuerza normal $N = W$, el valor máximo de F es $F = f = u_s W$. La ecuación (1) determina la magnitud de la fuerza máxima de fricción, pero no su dirección. La fuerza de fricción es un máximo; la ecuación (1) es aplicable, si las dos superficies están a punto de deslizarse una con respecto a la otra. Se dice que el deslizamiento es inminente y que las fuerzas de fricción resisten el movimiento inminente. Si (figura 19a) la superficie inferior está fija y el deslizamiento de la superficie superior hacia la derecha es inminente, la fuerza de fricción sobre la superficie superior resistirá este movimiento inminente (figura 19b). La fuerza de fricción sobre la superficie inferior tendrá dirección opuesta (Bedford, 2000, p. 509).

El coeficiente cinético.

Según la teoría de la fricción seca, la magnitud de la fuerza de fricción entre dos superficies planas y secas en contacto, que están en movimiento (deslizamiento) relativo, es la siguiente:

$$f = u_k N$$

donde N es la fuerza normal entre las superficies y u_k es el coeficiente de fricción cinética. Se supone que el valor de u_k depende solo de las composiciones condiciones de las superficies. Para un par de superficies dado, su valor es generalmente menor que el de u_s .

Una vez que el libro de la figura 2 ha comenzado a deslizarse, la fuerza de fricción $f = u_k N = u_k W$. Por tanto, la fuerza que debe ejercerse para mantener el libro en movimiento uniforme es $F u_k W$. Cuando dos superficies están deslizando entre sí, las fuerzas de fricción resisten el movimiento relativo. Ahora, suponga que en la figura 18 (a) la superficie inferior se encuentra fija y que la superficie superior está moviéndose hacia la derecha. La fuerza de fricción sobre la superficie superior actúa en dirección opuesta a la de su movimiento (figura 18b). La fuerza de fricción sobre la superficie inferior actúa en dirección opuesta (Bedford, 2000, p. 506).

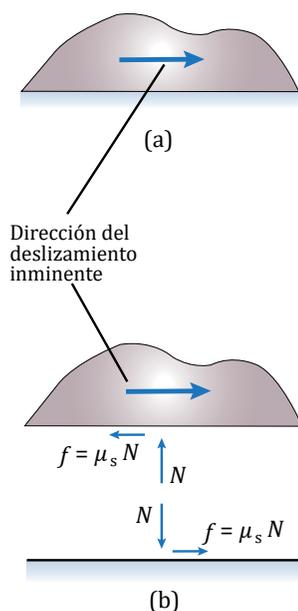


Figura 18. a) La superficie superior está a punto de deslizarse a la derecha.
b) Direcciones de la fuerza de fricción.

Fuente: Bedford, 2000, p. 506.

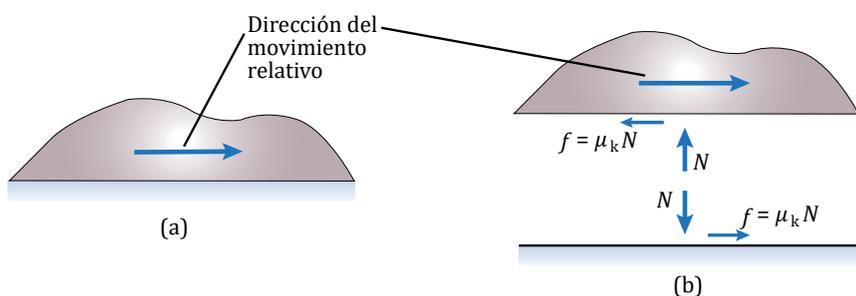


Figura 19. a) La superficie superior se está moviendo hacia la derecha respecto a la superficie inferior. b) Direcciones de las fuerzas de fricción.

Fuente: Bedford, 2000, p. 506.

3. Ángulo de fricción

En vez de que la reacción ejercida en una superficie por su contacto con otra se descomponga en una fuerza normal N y en una fuerza de fricción f (figura 20a), podemos expresarla en términos de su magnitud R y del ángulo de fricción θ entre la fuerza y la normal a la superficie (figura 20b). Las fuerzas normal y de fricción están relacionadas con R y θ por

$$f = R \operatorname{sen} \theta$$

$$N = R \operatorname{cos} \theta$$

Cuando el deslizamiento es inminente, el valor de θ se llama ángulo de fricción estática θ_s y, cuando las dos superficies están en movimiento relativo, su valor se llama ángulo de fricción cinética θ_k . Utilizando las ecuaciones (1)-(4), podemos expresar los ángulos de fricción estática y cinética en términos de los coeficientes de fricción:

$$\tan \theta_s = \mu_s$$

$$\tan \theta_k = \mu_k$$

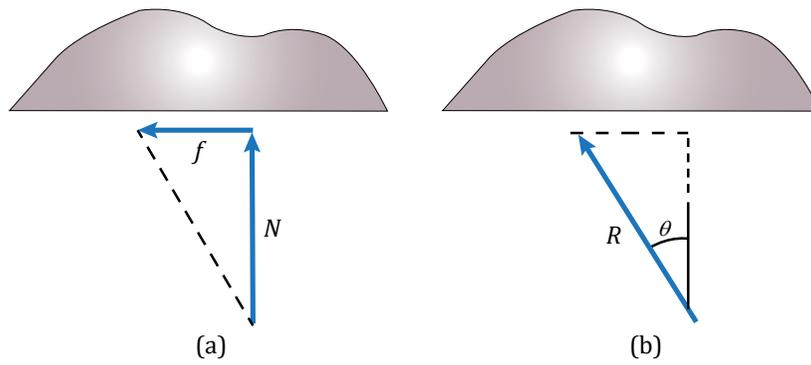


Figura 20. a) Ángulo de fricción. b) Reacción del plano sobre el cuerpo.
Fuente: Bedford, 2000, p. 507.

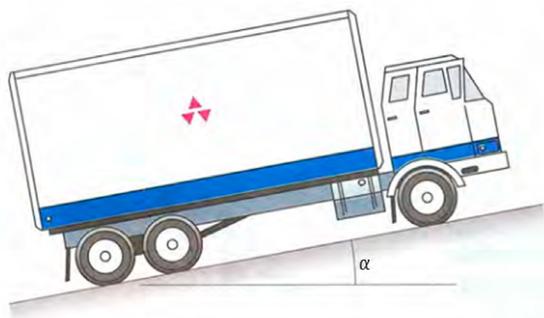


Actividad N.º 4

Resuelva problemas con fricción, considerando rozamiento estático y rozamiento cinético.

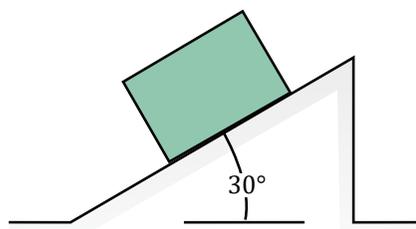
1. El camión de la figura pesa 18 000 lb.

- (a) Si está en reposo y $\alpha = 10^\circ$, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre él por el camino inclinado?
- (b) Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos del camión y el camino es $\mu_s = 0.6$, ¿cuál es el valor máximo del ángulo α en el que el camión puede permanecer en reposo?



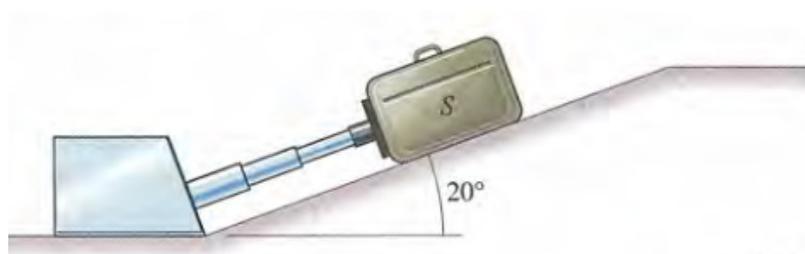
2. La caja de 50 N mostrada está en reposo.

- (a) ¿Cuál es la fuerza de fricción sobre la caja?
- (b) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estática que permite que la caja permanezca en reposo?

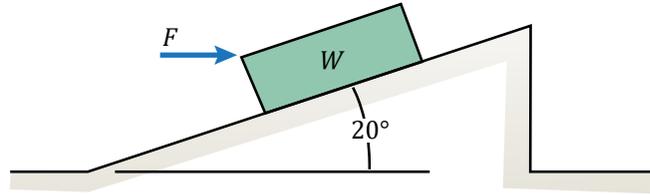


3. El mecanismo mostrado está diseñado para colocar maletas sobre una rampa. La maleta S pesa 20 lb. El mecanismo ejerce sobre la maleta una fuerza en dirección paralela a la rampa. Los coeficientes de fricción entre la maleta y la rampa son $\mu_s = 0.20$ $\mu_k = 0.18$.

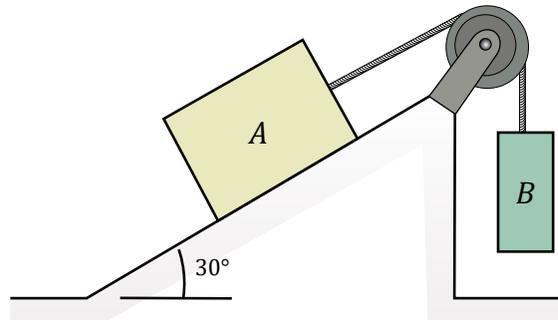
- (a) ¿Permanecerá la maleta en reposo sobre la rampa cuando el mecanismo no ejerza fuerza sobre ella?
- (b) Determine la fuerza que el mecanismo debe ejercer sobre la maleta para que este empiece a moverse hacia arriba.



4. El peso de la caja mostrada es de 30 N. La fuerza F es horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la superficie inclinada es $\mu_s = 0.2$. ¿Para qué intervalo de valores de F permanecerá la caja en reposo?



5. En la figura la caja A pesa 100 lb y la caja B 30 lb. Los coeficientes de fricción entre la caja A y la rampa son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.28$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre la caja A por la rampa?



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Lectura seleccionada N.º 3. La monumental represa china

Leer el artículo "La monumental represa China" publicada en la Revista Ciencia y Tecnología del Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto

Vidaud, I., & Vidaud, E. (2013). La monumental represa China. *Revista Ciencia y Tecnología del Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, II*, pp. 24–26. Disponible en <http://www.revistacyt.com.mx/pdf/noviembre2013/tecnologia.pdf>

Vidaud, I. y Vidaud, E. (2013). La monumental represa China. *Revista Ciencia y Tecnología del Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, I*, pp. 26–29. Disponible en <http://imcyc.com/revistacyt/octubre2013/pdfs/tecnologia.pdf>



Glosario de la Unidad III

1. Armadura

Estructura formada básicamente por elementos longitudinales en configuraciones triangulares, unidas por soportes de pasador, remaches o pernos. Son estacionarias y soportan cargas.

2. Armazón

Estructura formada por elementos de diversas formas, unidas por soportes de pasador o pernos. Son estacionarias y soportan cargas.

3. Coeficiente de fricción

Valor adimensional que representa la relación entre fuerzas de contacto en superficies ásperas en posible desplazamiento relativo entre sí. Característica que depende de los materiales que constituyen los cuerpos.

4. Estructura

Conjunto de elementos unidos para lograr en conjunto una determinada función.

5. Fuerza concentrada

Una fuerza concentrada representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo sería la fuerza de contacto entre una rueda y el suelo.

6. Fuerza distribuida

Cuando el área sobre la que se aplique la carga sea de dimensión considerable con el tamaño total del cuerpo, la representación de una fuerza aplicada sobre un cuerpo se hace mediante una carga distribuida o repartida sobre el área de contacto.

7. Fricción

Fuerza de reacción por contacto entre cuerpos o superficies ásperas en posible desplazamiento relativo entre sí.

8. Máquina

Estructura formada por elementos de diversas formas, unidas por soportes de pasador o pernos. Tienen partes móviles, transmiten fuerzas.

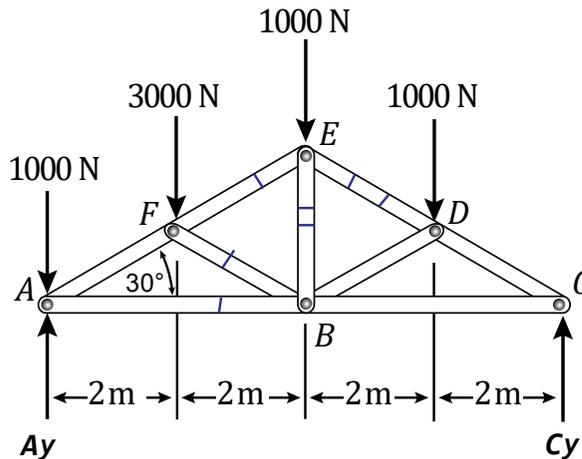


Bibliografía de la Unidad III

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E. & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.
- Meriam, J.L., & Kraige, L.G. (2010). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (7a edición). España: Editorial Reverté.

Autoevaluación N.º 3

La estructura mostrada en la figura está apoyada en dos rodillos en A y en C, las reacciones se representan por A_y y C_y , como se muestra en la figura. Desprecie los pesos de los elementos de la armadura.



1. Determine la magnitud de la componente de la reacción A_y .

- A. 600 N
- B. 700 N
- C. 4000 N
- D. 5000 N
- E. 1000 N

2. Calcule la magnitud de la reacción en el rodillo derecho C_y .

- A. 125 N
- B. 2000 N
- C. 1750 N
- D. 200 N
- E. 598 N

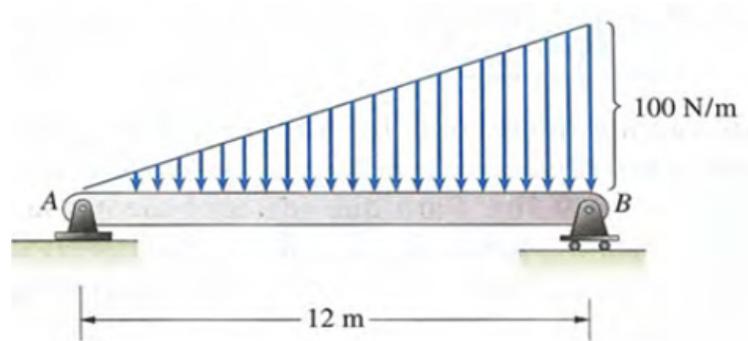
3. Determine la magnitud de la fuerza en el elemento ED.

- A. 700 N
- B. 1000 N
- C. 750 N
- D. 2500 N
- E. 3000 N

4. Calcule la magnitud de la fuerza en el elemento EB.

- A. 125 N
- B. 1450 N
- C. 1750 N
- D. 2000 N
- E. 4840 N

En la figura se muestra la carga distribuida sobre la viga ingrávada.



5. Determine la resultante de carga distribuida sobre la viga.

- A. 120 N
- B. 200 N
- C. 400 N
- D. 600 N
- E. 100 N

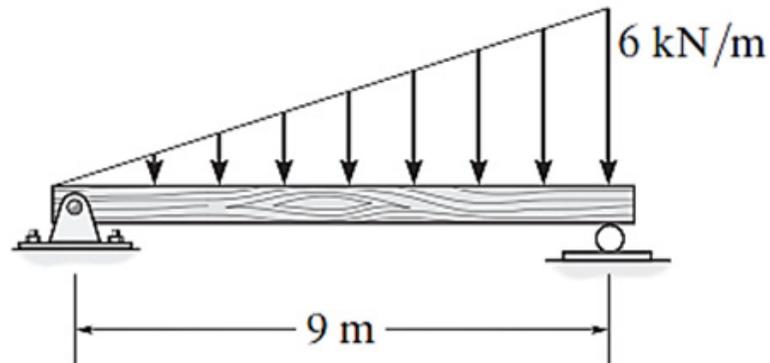
6. Determine la magnitud de la reacción en el apoyo de pasador A.

- A. 120 N
- B. 200 N
- C. 400 N
- D. 600 N
- E. 100 N

7. ¿Cuál es la magnitud de la reacción en el rodillo B?

- A. 200 N
- B. 400 N
- C. 600 N
- D. 100 N
- E. 500 N

La viga ingrávada soporta una carga distribuida como se muestra en la figura. Grafique los diagramas de momento flector y de fuerza cortante y responda.



8. ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?

- A. 48.4 kNm
- B. 31.2 kNm
- C. 12 kNm
- D. 8 kNm
- E. 4 kNm

9. En el problema anterior, indique el valor de la fuerza cortante máxima.

- A. 9 kN
- B. 12 kN
- C. 18 kN
- D. 5 kN
- E. 16 kN

10. ¿En qué posición el momento flector es máximo?

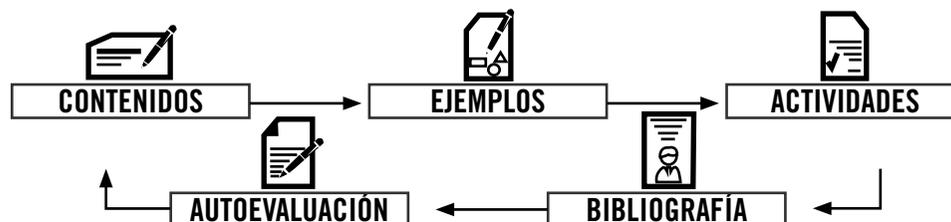
- A. $X = 5.3$ m
- B. $X = 5.2$ m
- C. $X = 5.1$ m
- D. $X = 5.0$ m
- E. $X = 5.9$ m

NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.
- Meriam, J.L., & Kraige, L.G. (2010). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (7a edición). España: Editorial Reverté.

UNIDAD IV FUERZAS EN VIGAS Y CABLES, MOMENTO DE INERCIA Y MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD IV



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Resultados del aprendizaje de la Unidad IV: Al finalizar la unidad, el estudiante aplica las ecuaciones de equilibrio para determinar las acciones internas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector en una sección de viga y traza los diagramas de variación de estas. Discrimina cables sujetos de cargas diversas y catenarias. Determina los momentos de inercia de cuerpos compuestos. Aplica el método del trabajo virtual a la determinación de fuerzas en un cuerpo rígido. Resuelve problemas aplicativos con exactitud.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p>Tema N.º 1: fuerzas en vigas</p> <ol style="list-style-type: none"> Fuerzas internas Fuerza cortante y momento flector de una viga Diagrama de fuerza cortante y momento flector de una viga. <p>Tema N.º 2: Fuerzas en cables</p> <ol style="list-style-type: none"> Cables con carga concentrada Cables con carga distribuidas Catenaria <p>Tema N.º 3: Momento de inercia</p> <ol style="list-style-type: none"> Momento de inercia de un área Determinación del momento de inercia por integración Momento polar de inercia Producto de inercia Teorema de ejes paralelos (Steiner) Momento de inercia de áreas compuestas <p>Tema N.º 4: Método del trabajo virtual</p> <ol style="list-style-type: none"> Trabajo de una fuerza Principio del trabajo virtual Aplicación a estructuras <p>Lectura seleccionada N.º 4 Puente Golden Gate de San Francisco.</p> <p>Autoevaluación de la Unidad IV</p>	<ol style="list-style-type: none"> Interpreta los efectos que se presentan en el interior de una viga frente a un estado de carga, mediante el uso del método de secciones. Formula ecuaciones que pueden graficarse, de modo que describe el corte y el momento internos a través de un elemento. <p>Actividad N.º 1</p> <ol style="list-style-type: none"> Analiza las fuerzas y estudia la geometría de los cables que sostienen una carga. Describe las características de los cables con carga distribuida. <p>Actividad N.º 2 Resuelve ejercicios y problemas sobre el movimiento curvilíneo de partículas.</p> <ol style="list-style-type: none"> Determina el momento de inercia de regiones de forma arbitraria. Evalúa los momentos de inercia máximo y mínimo mediante el cálculo del producto de inercia. <p>Actividad N.º 3 Resuelve ejercicios y problemas sobre cinética de partículas.</p> <ol style="list-style-type: none"> Aplica el método del trabajo virtual para determinar las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo rígido en equilibrio. Aplica el método del trabajo virtual en forma alternativa basado en el concepto de energía potencial. <p>Actividad N.º 4 Resuelve ejercicios y problemas sobre el método del trabajo virtual.</p> <p>Tarea académica N.º 2 Elabora una monografía de las lecturas seleccionadas n.º 4, 5 y 6.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Valora la importancia del diseño de elementos estructurales, en el cual el análisis de fuerzas internas juega un papel primigenio. Muestra interés en analizar situaciones más reales de interacción entre cuerpos gracias al análisis de la fricción seca y por rodadura.

Fuerzas en vigas

Tema N.º1



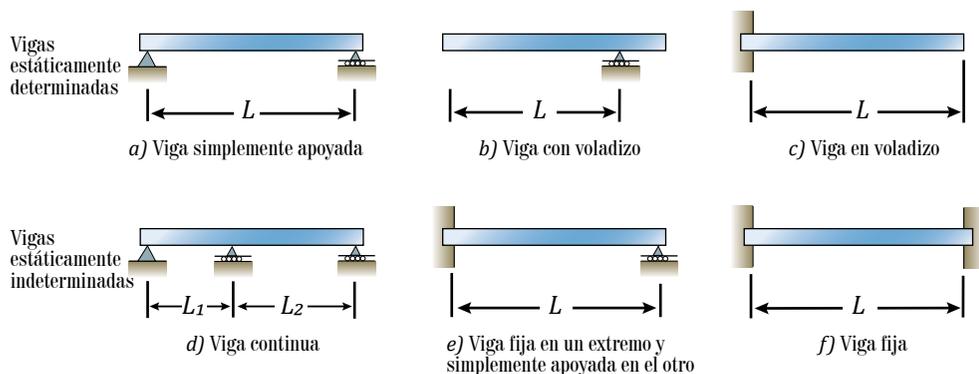
Figura 21. Vigas de hormigón para el tren eléctrico.
 Fuente: El Comercio, 2009.

Con la finalidad de que un elemento estructural no falle (se rompa o desplome) debido a las fuerzas y los momentos que actúan sobre él, el ingeniero proyectista debe conocer no solo las cargas y reacciones externas, sino también las fuerzas y los momentos que actúan dentro del elemento, es decir, las cargas internas que actúan en el elemento estructural.

1. Viga

“Es una barra de un material que soporta cargas laterales, es decir, cargas perpendiculares al eje de la barra” (Beer, 2013, p. 455).

A continuación, se muestran algunos tipos comunes de vigas.



Vigas con rótula:

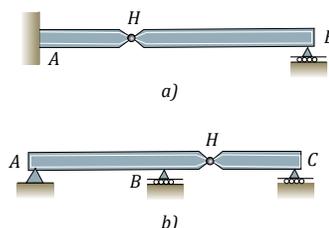


Figura 22. Tipos de vigas.
Fuente: Beer, 2013.

2. Fuerzas y momentos internos en una viga

Consideremos una viga sometida a una carga externa y a reacciones (Figura a). ¿Cómo podemos determinar las fuerzas y los momentos dentro de la viga? En la figura b, cortamos la viga con un plano en una sección transversal arbitraria y aislamos parte de ella. La parte aislada no puede estar en equilibrio a menos que esté sometida a cierto sistema de fuerzas y momentos en el plano en que se une a la otra parte de la viga. Éstas [sic] son las fuerzas y momentos internos que buscamos. Se sabe que cualquier sistema de fuerzas y momentos se puede representar por un sistema equivalente que consiste en una fuerza y un par. Si el sistema de cargas externas y reacciones sobre una viga es bidimensional, podemos representar las fuerzas y el momento internos con un sistema equivalente que consiste en dos componentes de fuerza y un par (Figura c) (Bedford, 2000, p. 448).

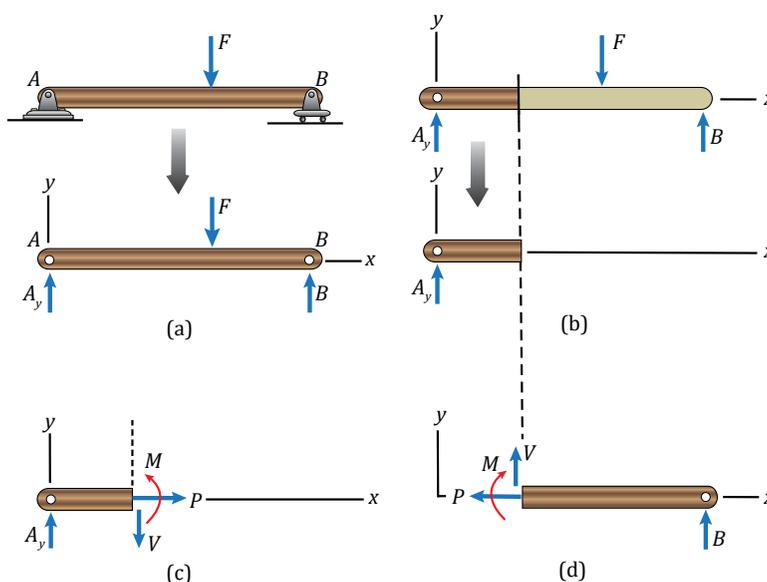


Figura 23. Fuerzas internas.
Fuente: Bedford, 2000, p. 448.

- ✓ La componente P paralela al eje de la viga se llama fuerza axial.
- ✓ La componente V normal al eje de la viga se llama fuerza cortante.
- ✓ El par M se llama momento flector.

En la figura (d) se muestran la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flector en el diagrama de cuerpo libre de la otra parte de la viga.

3. Procedimiento para determinar las fuerzas y momentos internos en una sección transversal particular de una viga

1. Determine las fuerzas y los momentos externos.

Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga y determine las reacciones en los soportes. Si la viga forma parte de una estructura, debe analizar la estructura.

2. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de una parte de la viga.

Corte la viga en el punto en que desee determinar las fuerzas internas y el momento, y dibuje el diagrama de cuerpo libre de una de las partes resultantes. Se puede escoger la parte con el diagrama más sencillo. Si el corte divide una carga distribuida, no represente la carga distribuida por medio de una fuerza equivalente hasta haber obtenido el diagrama de cuerpo libre.

3. Aplicar las ecuaciones de equilibrio

Use las ecuaciones de equilibrio para determinar P , V y M .

4. Diagramas de fuerza cortante y momento flector

El diseño de una viga requiere conocer las fuerzas y los momentos internos en ella. Son muy importantes los valores máximo y mínimo de la fuerza cortante y del momento flector, y las posiciones en que se presentan, por ello veremos cómo determinar los valores de P , V y M en función de x y presentaremos los diagramas de fuerza cortante y momento flector. "Sea una viga simplemente soportada y cargada con una fuerza (Figura a). En vez de cortarla en una sección específica para hallar las fuerzas y el momento internos, la cortamos en una posición arbitraria x entre el extremo izquierdo y la carga F (Figura b)" (Bedford, 2000, p. 456).

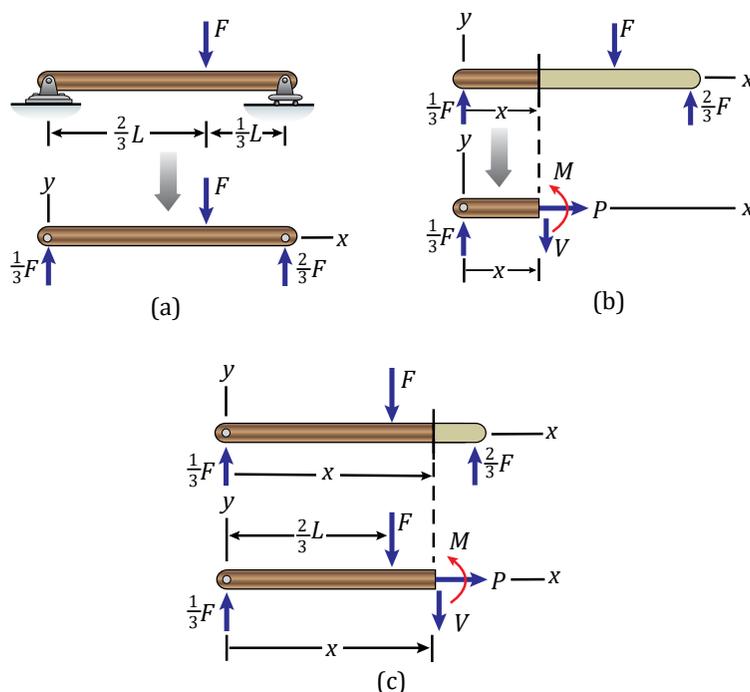


Figura 24. Diagramas de fuerzas internas.
Fuente: Bedford, 2000, p. 457.

Los diagramas de fuerza cortante y de momento flector son simplemente las gráficas de V y M , respectivamente, en función de x . Estos diagramas nos permiten ver los cambios en la fuerza cortante y en el momento flector a lo largo de la viga, así como sus valores máximo (menor

cota de la fuerza o el momento) y mínimo (mayor cota inferior).

Se puede determinar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga considerando un plano a una distancia arbitraria x del extremo y estableciendo P , V y M como funciones de x . Según la complejidad de la carga, deberán dibujarse varios diagramas de cuerpo libre para determinar las distribuciones sobre la longitud total (Bedford, 2000, p. 457)

5. Procedimiento para analizar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga y graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector:

1. Dibuje el DCL de la viga completa. Determine reacciones en los apoyos.
2. Corte la viga en una posición arbitraria x y dibuje el DCL de la sección elegida mostrando las cargas externas, las fuerzas internas y el momento flector (escoja la parte más sencilla).
3. Escriba ecuaciones en función de x para la porción elegida de la viga, registrando los valores de V y M .
4. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.

Luego, los diagramas del ejemplo anterior son los siguientes:

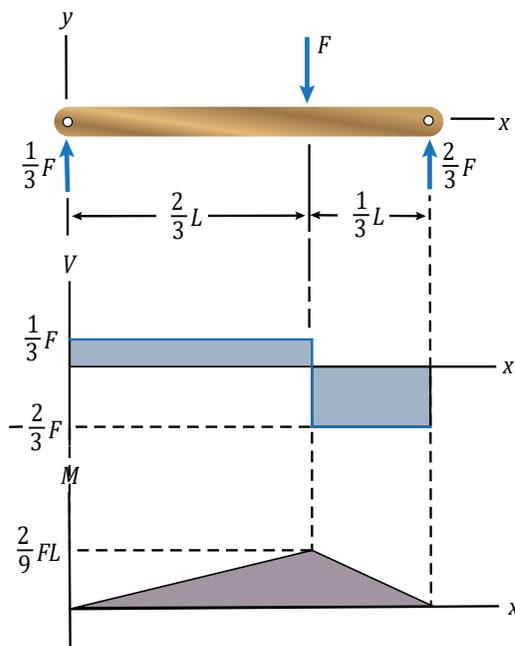


Figura 25. Diagramas de fuerzas internas.
Fuente: Bedford, 2000, p. 457.

6. Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flector

La fuerza cortante y el momento flector en una viga sometida a una carga distribuida se rigen por ecuaciones diferenciales simples. Deducimos esas ecuaciones y luego mostraremos que son una manera interesante e instructiva de obtener los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y que también son útiles para determinar deflexiones en vigas.

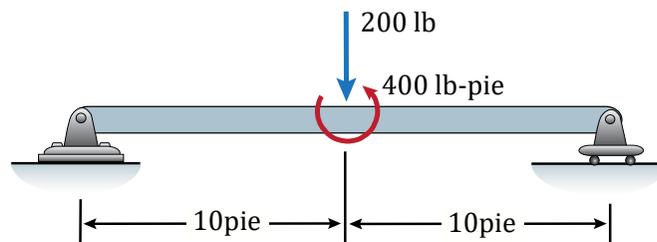
$$\frac{dV}{dx} = -w = \frac{dM}{dx} \quad V$$

Actividad N.º 1

- Interprete los efectos que se presentan en el interior de una viga frente a un estado de carga, mediante el uso del método de secciones.
- Formule ecuaciones que pueden graficarse, de modo que describe el corte y el momento internos a través de un elemento.

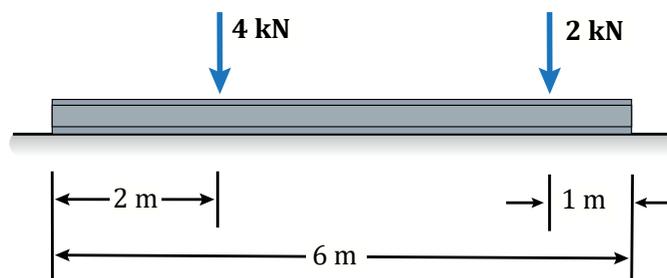
1. Para la viga mostrada:

- Determine las ecuaciones de momentos y fuerzas cortantes para los intervalos: $\langle 0;10 \rangle$ y $\langle 10;20 \rangle$ (pie).
- ¿Cuál es el valor de la fuerza cortante y momento flector en $x = 12$ pie?
- ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?
- Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector.
- Si se reemplaza la fuerza puntual por un par de 250 Nm en sentido horario en su misma ubicación, repita los ítems a, b, c y d.



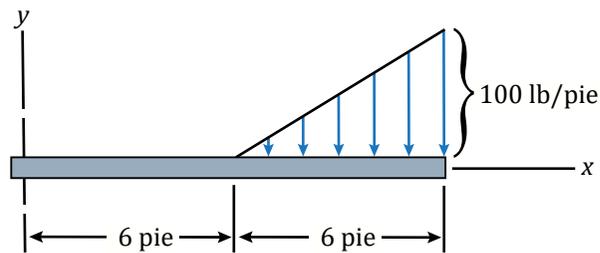
2. Para la viga mostrada apoyada sobre una superficie lisa:

- Determine las ecuaciones de momentos y fuerzas cortantes.
- ¿Cuál es el valor de la fuerza cortante y momento flector en $x = 6$ m?
- ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?
- Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



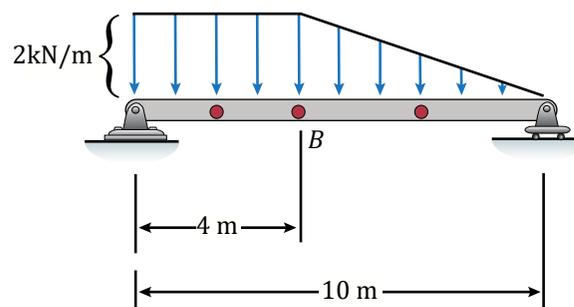
3. Para la viga empotrada mostrada:

- Determine las ecuaciones de momentos y fuerzas cortantes.
- ¿Cuál es el valor de la fuerza cortante y momento flector en $x = 3$ m?
- ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?
- Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



4. Para la viga mostrada:

- Determine las ecuaciones de momentos y fuerzas cortantes para los intervalos: $\langle 0;4 \rangle$ y $\langle 6;10 \rangle$ (m).
- ¿Cuál es el valor de la fuerza cortante y momento flector en $x = 5$ m?
- ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?
- Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector.



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: Mc Graw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Fuerzas en cables

Tema N.º2



Figura 26. Puente Middle Bridge - Massachusetts.
 Fuente: Tecnología de estructuras. MacHannon, 2013.

En este tema comprenderemos en primer término que, por su combinación única de resistencia, poco peso y flexibilidad, las cuerdas y cables se utilizan a menudo para soportar cargas y transmitir fuerzas en estructuras, máquinas y vehículos. Los grandes puentes colgantes están soportados por enormes cables de acero. Los ingenieros utilizan cables para crear estructuras estéticas con espacios interiores abiertos como estadios. Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería como puentes colgantes, líneas de transmisión, teleféricos, contravientos para torres altas, etc. Los cables pueden dividirse en dos categorías de acuerdo con las cargas que actúan sobre ellos: 1) cables que soportan cargas concentradas y 2) cables que soportan cargas distribuidas.

1. Cables con carga concentrada

Para el estudio de estos cables, consideremos un cable unido a dos puntos fijos A y B que soportan cargas concentradas verticales P_1, P_2, \dots, P_n (figura 27a). Se supone que el cable es flexible, esto es, que su resistencia a la flexión es pequeña y se puede despreciar. Además, también se supone que el peso del cable es susceptible de ser ignorado en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a dos fuerzas y, por consiguiente, las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable.

(Beer, 2013, p. 385)

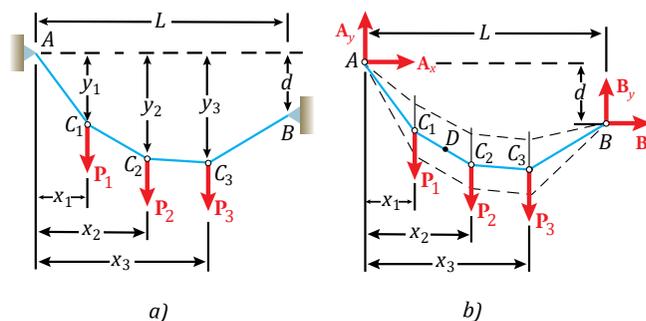


Figura 27. Cables con carga concentrada.
 Fuente: Beer, 2013.

También debemos suponer que cada una de las cargas se encuentra en una línea vertical dada, esto es, que la distancia horizontal desde el apoyo A hasta cada una de las cargas es conocida; además, también se supone que se conocen las distancias horizontal y vertical entre los apoyos. Se busca determinar la forma del cable, esto es, la distancia vertical desde el apoyo A hasta cada uno de los puntos C_1, C_2, \dots, C_n , y también se desea encontrar la tensión T en cada uno de los segmentos del cable (Beer, 2013, p. 385).

Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre para todo el cable (figura 23b). Como la pendiente de las porciones del cable unidas en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con dos componentes. Por tanto, están involucradas cuatro incógnitas y las tres ecuaciones de equilibrio que se tienen disponibles no son suficientes para determinar las reacciones en A y B. De esta manera, se debe obtener una ecuación adicional considerando el equilibrio de una porción del cable. Lo anterior es posible si se conocen las coordenadas x e y de un punto D del cable. Dibujando el diagrama de cuerpo libre del segmento AD del cable (figura 24a) y escribiendo $\sum M_D = 0$, se obtiene una relación adicional entre las componentes escalares A_x y A_y y se pueden determinar las reacciones en A y B. Sin embargo, el problema continuaría siendo indeterminado si no se conocieran las coordenadas de D, a menos que se proporcionara otra relación entre A_x y A_y (o entre B_x y B_y). Como se indica por medio de las líneas discontinuas en la figura 2b, el cable podría colgar en varias formas posibles.

Una vez que se han determinado A_x y A_y , se puede encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable. Por ejemplo, considerando el punto C_2 , se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AC_2 del cable (figura 27b). Si se escribe $\sum M_2 = 0$, se obtiene una ecuación que se puede resolver para y_2 .

Al escribir $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza T que representa la tensión en la porción del cable que está a la derecha de C_2 . Se observa que $T \cos \theta = A_x$; por tanto, la componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable. Se concluye que la tensión T es máxima cuando $\cos \theta$ es mínimo, esto es, en la porción del cable que tiene el mayor ángulo de inclinación. Obviamente, dicha porción del cable debe ser adyacente a uno de los apoyos del cable.

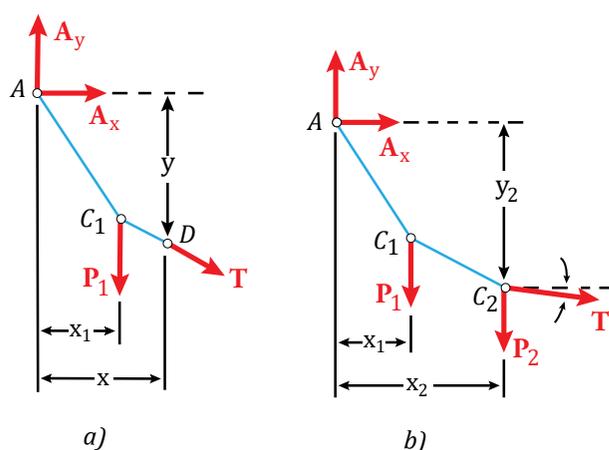


Figura 28. Cables con carga concentrada.
Fuente: Beer, 2013.

2. Cargas uniformemente distribuidas a lo largo de una línea horizontal

El cable principal de un puente colgante es un ejemplo de cable sometido a una carga distribuida en una línea horizontal (Figura 28). El peso del puente está (en forma aproximada) uniformemente distribuido en la horizontal. La carga transmitida al cable principal por los cables verticales se puede representar como una carga distribuida. Aquí veremos la forma y la variación de la tensión en un cable como este (Bedford, 2010, p. 471).

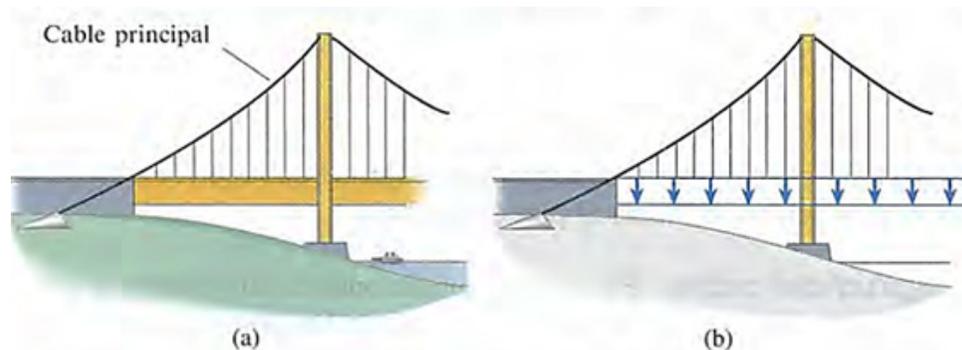


Figura 29. Cables con cargas uniformemente distribuidas.
Fuente: Bedford, 2000, p. 471.

Consideremos un cable suspendido sometido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de una línea horizontal (figura 29a). Ignoramos el peso del cable. El origen del sistema coordenada está en el punto más bajo del cable. Sea $y(x)$ la curva descrita por el cable en el plano x - y , nuestro objetivo es determinar la curva $y(x)$ y la tensión en el cable.

Forma del cable: Obtenemos un diagrama de cuerpo libre cortando el cable en su punto más bajo y en una posición arbitraria x (figura 29b). El término T_0 es la tensión en el punto más bajo del cable y T es la tensión en x . La fuerza hacia abajo ejercida por la carga distribuida es w_x . De este diagrama obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$T \cos\theta = T_0 \quad (1)$$

$$T \sin\theta = w_x \quad (2)$$

Eliminamos la tensión T dividiendo la segunda ecuación entre la primera, para obtener lo siguiente:

$$\tan\theta = \frac{w}{T_0} x = ax \quad (3)$$

donde definimos la constante $a = w/T_0$. La pendiente del cable en x es $dy/dx = \tan\theta$, por lo que obtenemos una ecuación diferencial que define la curva descrita por el cable:

$$\frac{dy}{dx} = ax \quad (4)$$

Hemos escogido el sistema coordenado de manera que, integrando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\int_0^y dy = \int_0^x ax \, dx \quad (5)$$

Luego, encontramos que la curva descrita por el cable es la parábola:

$$y = \frac{1}{2} ax^2 \quad (6)$$

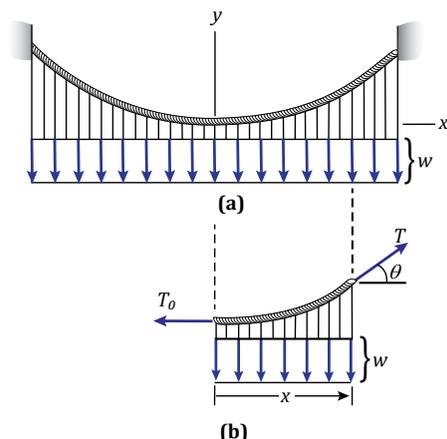


Figura 30. Cables con cargas uniformemente distribuidas.
Fuente: Bedford, 2000, p. 471.

Tensión en el cable: Para determinar la distribución de la tensión, elevamos al cuadrado ambos lados de las ecuaciones (1) y (2) y las sumamos:

$$T = T_0 \sqrt{1 + a^2 x^2} \quad (7)$$

La tensión es mínima en el punto más bajo del cable y crece monótonicamente con su distancia al punto más bajo.

Longitud del cable: En algunas aplicaciones es útil tener una expresión para la longitud del cable en función de x . Podemos escribir la relación $ds^2 = dx^2 + dy^2$, donde ds es un elemento de longitud del cable en la forma:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (8)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en esta expresión e integrando, obtenemos una ecuación para la longitud del cable en el intervalo horizontal de 0 a x :

$$s = \frac{1}{2} \left\{ x \sqrt{1 + a^2 x^2} + \frac{1}{a} \ln [ax + \sqrt{1 + a^2 x^2}] \right\} \quad (9)$$

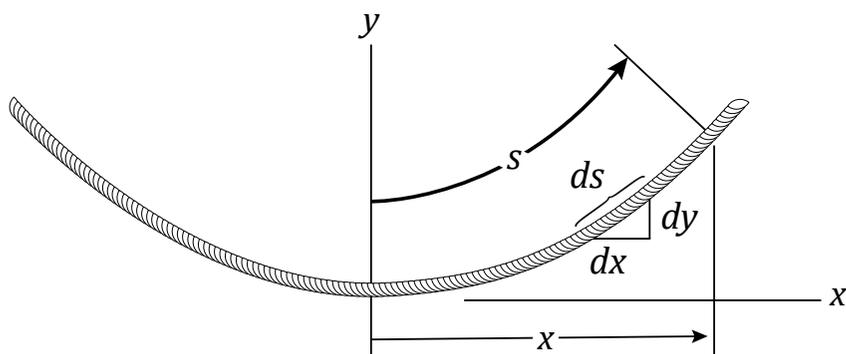


Figura 31. Longitud s del cable en el intervalo horizontal de 0 a x .
Fuente: Bedford, 2000, p. 472.

3. Cargas uniformemente distribuidas en el cable

El peso de un cable lo somete a una carga uniformemente distribuida en toda su longitud. Si un cable se somete a fuerzas iguales paralelas espaciadas uniformemente, la carga sobre el cable suele representarse uniformemente distribuida en toda su longitud. Aquí veremos la forma asumida por el cable y la variación de su tensión.

Supongamos que sobre un cable actúa una carga distribuida que somete cada elemento ds de su longitud a una fuerza $w ds$, donde w es constante. La figura 32 es el diagrama de cuerpo libre obtenido al cortar el cable en su punto más bajo y en un punto a una distancia s . T_0 y T son las tensiones en el punto más bajo y en s , respectivamente. La carga distribuida ejerce una fuerza ws hacia abajo. El origen del sistema se halla en el punto más bajo. Sea la función $y(x)$ la curva descrita por el cable en el plano x - y , el objetivo es determinar $y(x)$ y T .

Forma del cable: Del diagrama de cuerpo libre de la figura 5, obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$T \sin \theta = ws \quad (10)$$

$$T \cos \theta = T_0 \quad (11)$$

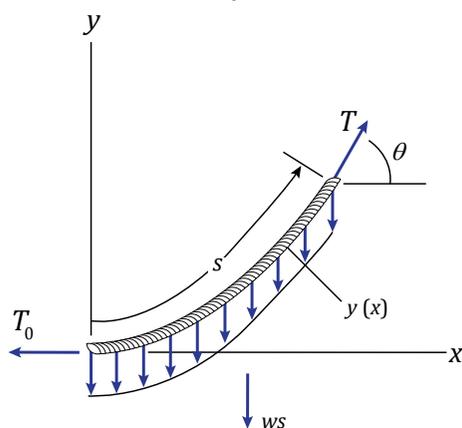


Figura 32. Cargas uniformemente distribuidas en el cable.
Fuente: Bedford, 2007.

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, obtenemos

$$\tan \theta = \frac{w}{T_0} s = as \quad (12)$$

donde definimos la constante $a = w/T_0$, la pendiente del cable $dy/dx = \tan \theta$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = as \quad (13)$$

La derivada de esta ecuación con respecto a x es

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = a \frac{ds}{dx} \quad (14)$$

Por la relación:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

podemos escribir la derivada de s con respecto a x como:

$$\frac{d}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{1 + \sigma} \quad (15)$$

donde definimos σ como la pendiente:

$$\sigma = \frac{dy}{dx}$$

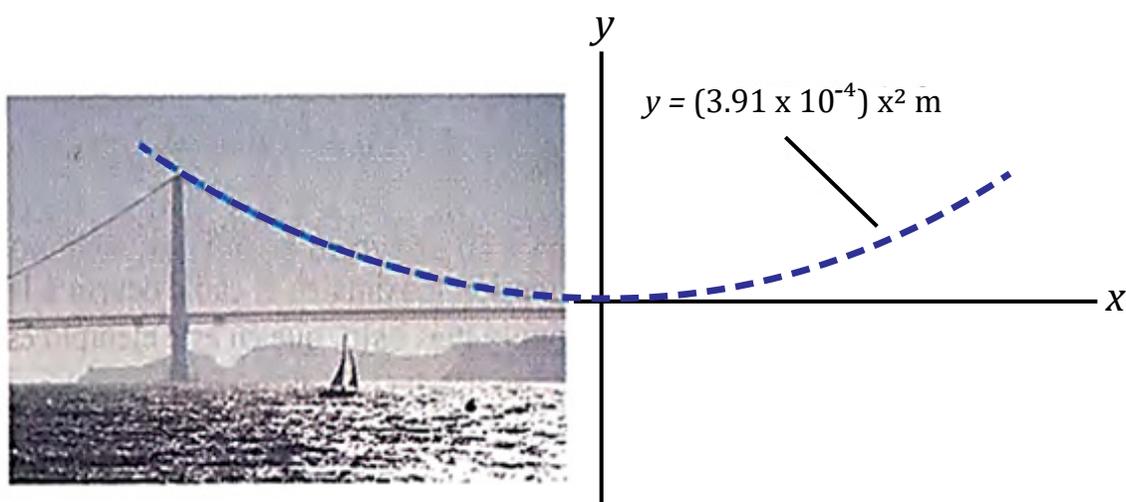
Con la ecuación (15), escribimos la ecuación (14) como:

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} = a dx$$

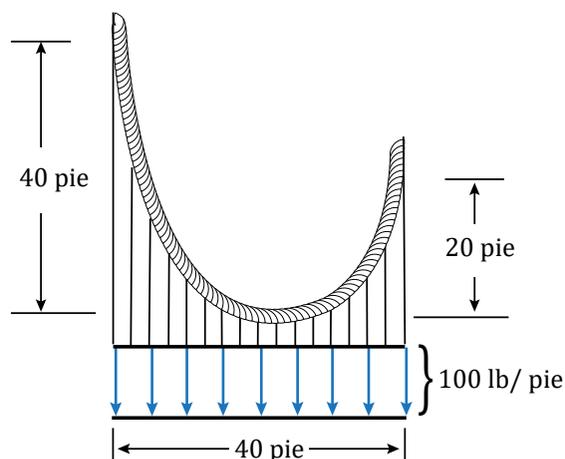
Actividad N.º 2

Analiza las fuerzas en cables con cargas concentradas y con cargas distribuidas.

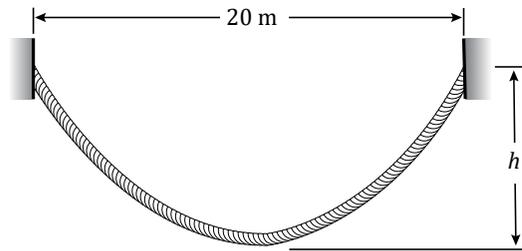
1. La distancia horizontal entre las torres de soporte del puente Golden Gate de San Francisco, California, es de 1280m, como se muestra en la fotografía. Las cúspides de las torres están a 160 m sobre el punto más bajo de los cables de soporte principales. Obtenga la ecuación de la curva descrita por los cables.



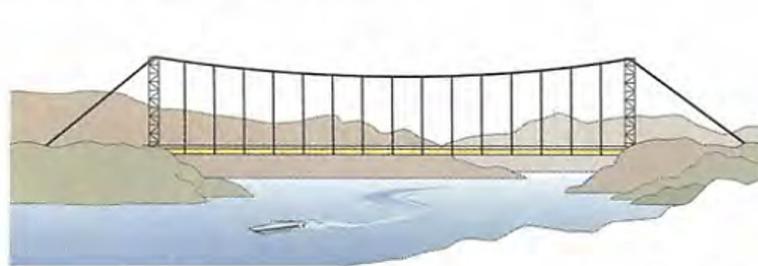
2. El cable mostrado en la figura soporta una carga distribuida de 100 lb/pie. ¿Qué valor tiene la tensión máxima en el cable?



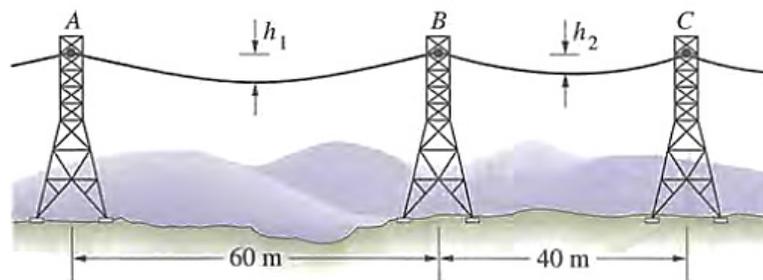
3. El cable en la figura 9.28 pesa 10 N/m . La tensión en su punto más bajo es de 50 N . Determine la distancia h y la tensión máxima en el cable.



4. Unos ingenieros utilizan un cable para suspender una tubería sobre un río. La distancia entre las torres es de 120 pies y el punto más bajo del cable se encuentra 10 pies abajo de las cúspides de las torres. El peso total de la tubería suspendida es de 6000 lb.
- Determine la tensión máxima en el cable suspendido.
 - Determine la longitud del cable suspendido.



5. El cable de la figura soporta un puente de ferrocarril entre dos túneles. La carga distribuida es $w = 1 \text{ MN/m}$ y $h = 40 \text{ m}$.
- ¿Cuál es la tensión máxima en el cable?
 - ¿Cuál es la longitud del cable?



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Momento de inercia

Tema N.º3



Figura 33. Vigas de acero estructural para edificios.
Fuente: Tecnología de puentes. MacHanon, (2009).

La cantidad denominada momento de inercia aparece con frecuencia en los análisis de problemas de ingeniería. Por ejemplo, los momentos de inercia de áreas se utilizan en el estudio de fuerzas distribuidas y en el cálculo de deflexiones de vigas. El momento ejercido por la presión sobre una placa plana sumergida se puede expresar en términos del momento de inercia del área de la placa. En dinámica, los momentos de inercia de masa se usan para calcular los movimientos rotatorios de objetos. Para estudiar estas aplicaciones, los momentos de inercia deben ser parte de nuestro vocabulario técnico.

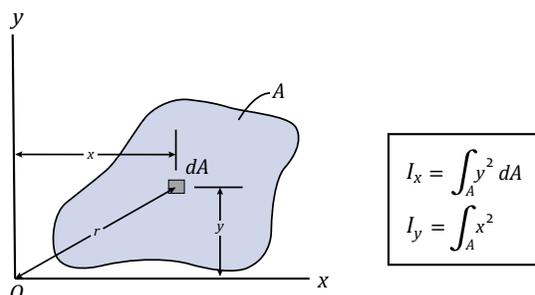
En este tema mostraremos cómo calcular los momentos de inercia de áreas simples o de cuerpos y luego usaremos resultados llamados teoremas de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia de áreas o cuerpos más complejos.

En el caso de vigas con cargas laterales, estas hacen que la viga se flexione; por tanto, la viga debe ser resistente a la flexión para soportar cargas. La resistencia a la flexión depende directamente del momento de inercia del área de su sección transversal. A mayor momento de inercia la viga aumenta su resistencia. En condiciones reales, la forma de las secciones transversales de las vigas, como los pasos a desnivel carreteros, o de vías férreas, o de marcos de edificios están configurados para tener grandes momentos de inercia.

1. Momentos de inercia de un área

La propiedad del área de una sección transversal que determina la resistencia a la flexión respecto a un eje particular de una viga se denomina "momento de inercia del área".

Respecto a la figura se define lo siguiente:



I_x = Momento de inercia del área A respecto al eje x.
 I_y = Momento de inercia del área A respecto al eje y.

Se debe tener presente que los momentos de inercia son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son m^4 (SI), pie^4 (sistema inglés).

2. Momento de inercia polar

Además de los momentos de inercia respecto a los ejes anteriores, para la rotación de placas se define respecto al polo O o eje z, donde r es la distancia perpendicular desde el polo hasta el elemento dA:

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Se verifica, dado que

$$r^2 = x^2 + y^2$$

3. Radio de giro de un área

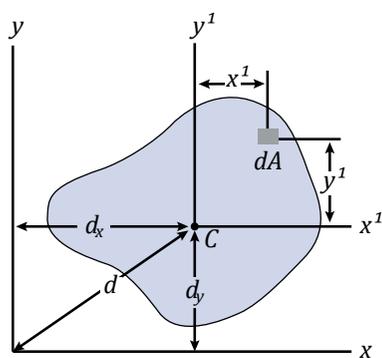
El radio de giro de un área respecto a un eje tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas. Se determinan así:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Los radios de giro son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son m (SI), pie (sistema inglés).

4. Teorema de los ejes paralelos para un área:

También llamado teorema de Steiner. El teorema de los ejes paralelos puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje que sea paralelo a un eje que pasa a través de su centroide y del cual se conozca el momento de inercia.



$$I_{x'} = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_{y'} = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

Donde:

\bar{I}_x , \bar{I}_y son los momentos de inercia del área A respecto a los ejes centroidales.

"El momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través del centroide del área, más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes".

5. Momentos de inercia de áreas compuestas

Procedimiento:

1. Partes simples componentes

- ✓ Con un croquis, divida el área en sus partes componentes y formas conocidas, e indique la distancia perpendicular desde el centroide de cada parte hasta el eje de referencia.

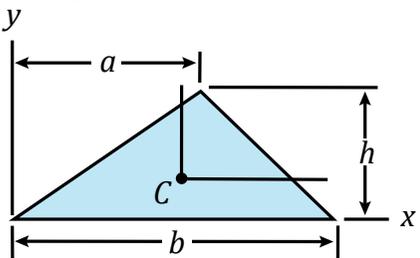
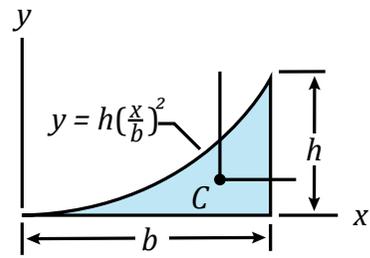
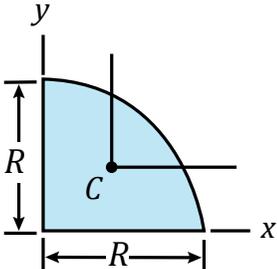
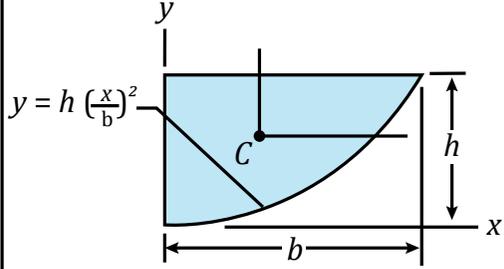
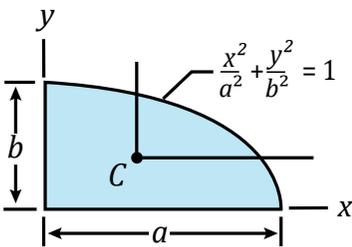
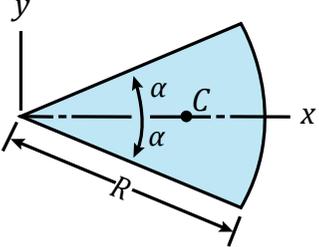
2. Teorema de los ejes paralelos

- ✓ Si el eje centroidal para cada forma conocida no coincide con el eje de referencia, deberá usarse el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de la parte con respecto al eje de referencia. Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje centroidal, use tablas de fórmulas para regiones conocidas.

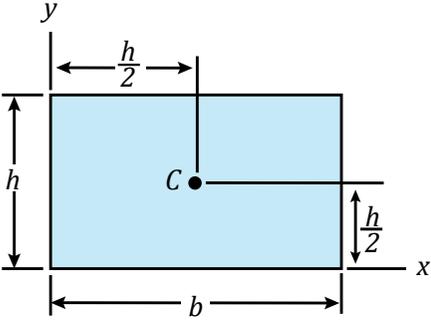
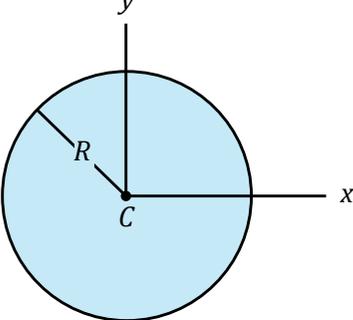
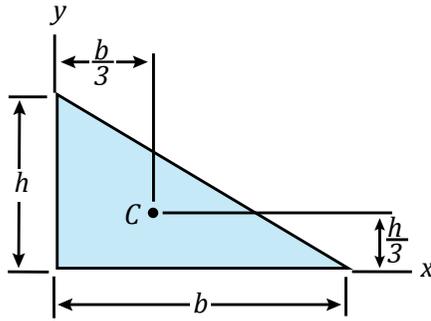
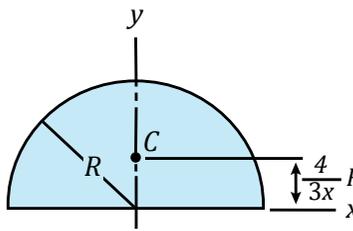
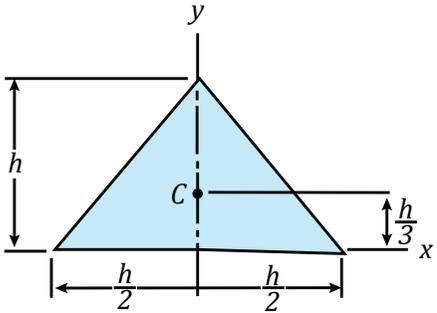
3. Suma

- ✓ El momento de inercia de toda el área con respecto al eje solicitado se determina por la suma de los resultados de sus partes componentes con respecto a este eje.
- ✓ Si una parte componente tiene un "agujero", su momento de inercia se encuentra al restar el momento de inercia del agujero de la suma de momentos de inercia de las demás partes componentes que conforman el área inicial.

Propiedades de las figuras planas

<p>1. Triángulo</p>  $I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{36} (a^2 - ab + b^2) \quad I_y = \frac{bh}{12} (a^2 + ab + b^2)$ $I_{xy} = \frac{bh^2}{72} (2a^2 - b) \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24} (2a^2 + b)$	<p>2. Enjuta parabólica</p>  $I_x = \frac{37bh^3}{2100} \quad I_x = \frac{bh^3}{21}$ $I_y = \frac{b^3h}{80} \quad I_y = \frac{b^3h}{5}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{120} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$
<p>3. Cuarto de círculo</p>  $I_x = I_y = 0.05488R^4 \quad I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$ $I_{xy} = -0.01647R^4 \quad I_{xy} = \frac{R^4}{8}$	<p>4. Región semiparabólica</p>  $I_x = \frac{8bh^3}{175} \quad I_x = \frac{2bh^3}{7}$ $I_y = \frac{19b^3h}{480} \quad I_y = \frac{2b^3h}{15}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{60} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$
<p>5. Cuarto de elipse</p>  $I_x = 0.05488ab^3 \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$ $I_y = 0.05488a^3b \quad I_y = \frac{\pi a^3b}{16}$ $I_{xy} = -0.01647a^2b^2 \quad I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$	<p>6. Sector circular</p>  $I_x = \frac{R^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $I_y = \frac{R^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha)$ $I_{xy} = 0$

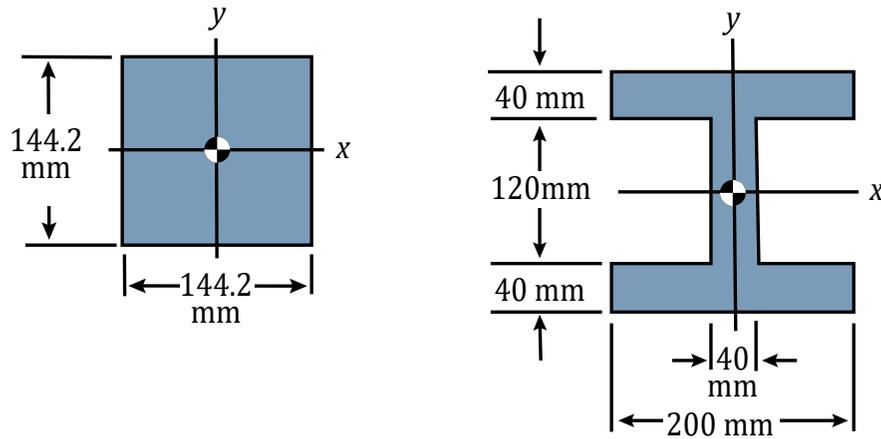
Propiedades de las figuras planas (continuación)

<p>7. Región rectangular</p>  $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{12} \quad \bar{I}_{xy} = 0$ $I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{b^3h}{3} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$	<p>8. Región circular</p>  $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \quad I_{xy} = 0$
<p>9. Triángulo rectángulo</p>  $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{36} \quad \bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{b^3h}{12} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$	<p>10. Región semicircular</p>  $\bar{I}_x = 0.1098R^4 \quad \bar{I}_{xy} = 0$ $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8} \quad I_{xy} = 0$
<p>11. Triángulo isósceles</p>  $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{48} \quad \bar{I}_{xy} = 0$ $I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_{xy} = 0$	

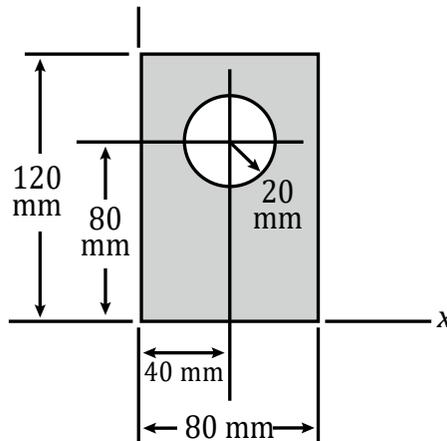
Actividad N.º 3

Aplicar el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de los cuerpos compuestos.

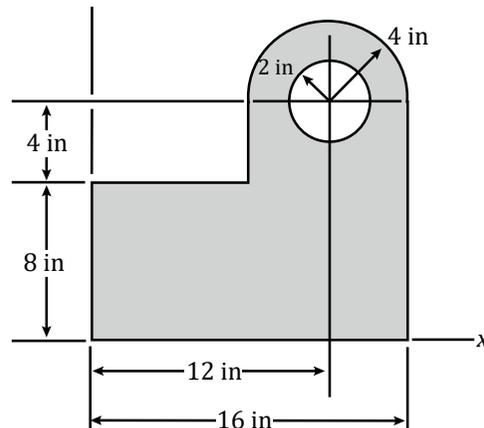
1. Para las secciones transversales de las vigas mostradas, ¿cuál tiene mayor momento de inercia respecto al eje x ?



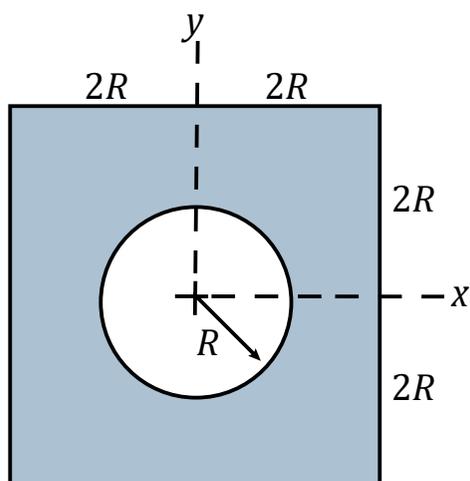
2. Determine I_x y k_x .



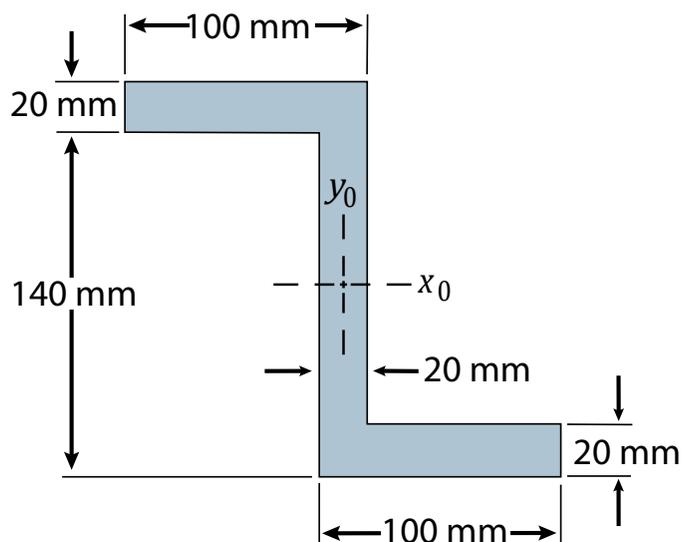
3. Determine I_x y k_x .



4. Halle el momento de inercia respecto al eje x del cuadrado sin el hueco circular y con él.



5. Halle los momentos de inercia del perfil en Z respecto a sus ejes centroidales x_0 y y_0 .



NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Método del trabajo virtual

Tema N.º4



Figura 34. Fuerzas ejercidas por cilindros hidráulicos para posicionar un elevador.
 Fuente: Beer, R. Mecánica vectorial para ingenieros, 2013.

En el presente tema desarrollaremos una forma alternativa de analizar situaciones de equilibrio de un cuerpo rígido. Por ejemplo, cuando se estira un resorte, el trabajo que se efectúa se almacena en el resorte como energía potencial. Al elevar una plataforma extensible se incrementa su energía potencial gravitatoria. En este capítulo definimos el trabajo y la energía potencial y presentamos un poderoso método basado en el principio del trabajo virtual. En algunos casos, este principio se puede usar para analizar cuerpos y estructuras en equilibrio con mayor facilidad que dibujando diagramas de cuerpo libre y planteando las ecuaciones de equilibrio (Bedford, 2010, p. 578)

El principio del trabajo virtual se usa en gran medida en aplicaciones avanzadas de mecánica, especialmente en el análisis de elementos y estructuras deformables.

1. Trabajo virtual

“El principio del trabajo virtual es un enunciado sobre el trabajo efectuado por fuerzas y pares cuando un cuerpo o estructura está sometido a movimientos. Antes de estudiarlo, definamos el concepto de trabajo” (Bedford, 2010, p. 579).

Trabajo. Consideremos una fuerza que actúa sobre un cuerpo en un punto P (figura 1a). Supongamos que el cuerpo sufre un movimiento infinitesimal, de modo que P tiene un desplazamiento diferencial dr (figura 1b). Entonces, el trabajo dU de F como resultado del desplazamiento dr se define como

$$dU = F dr \quad (1)$$

De la definición del producto punto, $dU = (|F| \cos\theta) |dr|$, donde θ es el ángulo entre F y dr (figura 1c). El trabajo es igual al producto de la componente de F en la dirección de dr

y la magnitud de dr . Note que, si la componente de F paralela a dr apunta en la dirección opuesta a dr , el trabajo es negativo. También, si F es perpendicular a dr , el trabajo es nulo. Las dimensiones del trabajo son (fuerza) \times (longitud). Consideremos ahora un par que actúa sobre un cuerpo (Fig. 2a). El momento debido al par es $M = Fh$ en sentido antihorario. Si el cuerpo gira un ángulo $d\alpha$ infinitesimal antihorario (Fig. 1b), los puntos de aplicación de las fuerzas se desplazan distancias diferenciales $0.5hd\alpha$. Entonces, el trabajo total realizado es $dU = F(0.5h d\alpha) + F(0.5h d\alpha) = M d\alpha$. (Bedford, 2000, p. 558).

Vemos que cuando un cuerpo sobre el que actúa un par M gira un ángulo $d\alpha$ en el mismo sentido que el par (figura 2c), el trabajo resultante es el siguiente:

$$dU = M d\alpha \quad (2)$$

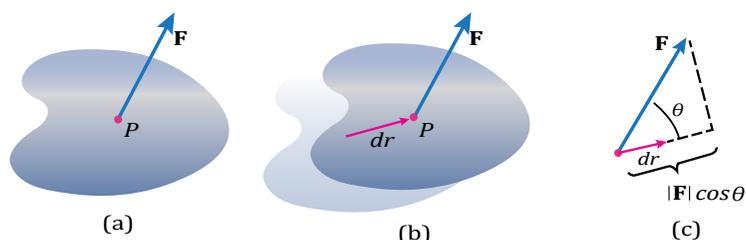


Figura 1. a) Fuerzas F actuando sobre un cuerpo, b) Desplazamiento dr de P , c) Trabajo dU .
Fuente: Bedford, 2000, p. 558.

Si el sentido del par es opuesto al sentido de $d\alpha$, el trabajo es negativo.

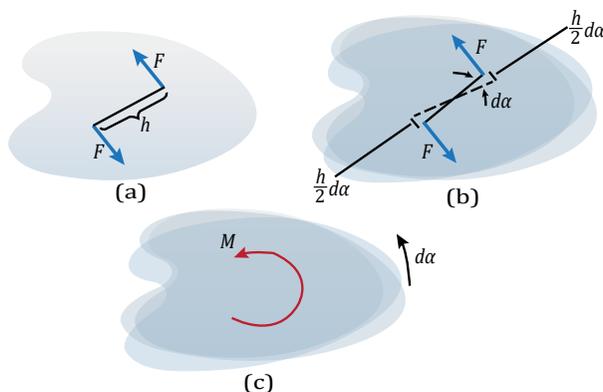


Figura 35. a) Par que actúa sobre un cuerpo, b) Giro infinitesimal del cuerpo, c) Un par M que actúa sobre un cuerpo que gira un ángulo $d\alpha$.
Fuente: Bedford, 2000, p. 558.

2. Principio del trabajo virtual

Ya que hemos definido el trabajo efectuado por fuerzas y pares, podemos establecer el principio del trabajo virtual. Pero antes analizaremos un ejemplo que facilite su comprensión.

La barra homogénea (a) está soportada por la pared y el soporte de pasador en A , y cargada por un momento par que llamaremos M . Luego, el DCL de la barra se observa en la figura (b). Las ecuaciones de equilibrio correspondientes son las que presentamos a continuación (Bedford, 2000, p. 559):

$$\sum F_x = A_x - N = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = A_y - W = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{\text{punto A}} = NL \text{sen } \alpha - 0.5 WL \text{cos} \alpha - M = 0 \quad (5)$$

A partir de estas tres ecuaciones, podemos encontrar las reacciones A_x , A_y y N . Pese a ello, nuestro propósito es otro.

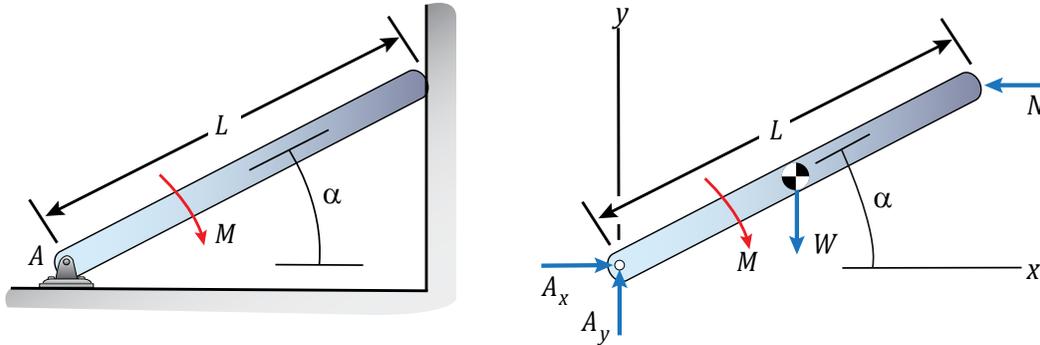


Figura 36. a) Barra sometida a un momento par M , b) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

Fuente: Bedford, 2000, p. 559.

A partir de la figura 3, analizaremos con la siguiente pregunta: si las fuerzas y el par de la figura 3b actúan sobre la barra, y esta se somete a una traslación infinitesimal hipotética en la dirección x , como se muestra en la figura 4, ¿qué trabajos efectúa? El desplazamiento hipotético se llama desplazamiento virtual de la barra, y el trabajo resultante δU se llama trabajo virtual. El soporte de pasador y la pared impiden que la barra se desplace en la dirección x . Aunque el desplazamiento virtual es un artificio teórico, nuestro objetivo es calcular el trabajo virtual resultante:

$$\delta U = A_x \delta + (-N) \delta x = (A_x - N) \delta x \quad (6)$$

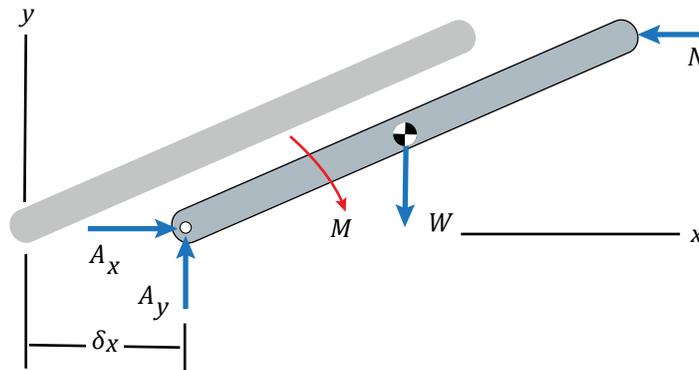


Figura 4. Desplazamiento virtual δx .

Fuente: Bedford, 2000, p. 559.

Las fuerzas A_y y W no trabajan porque son perpendiculares a los desplazamientos de sus puntos de aplicación. El momento M tampoco trabaja porque la barra no gira. Comparando esta ecuación con la ecuación (3), encontramos que el trabajo virtual es igual a cero. A continuación, damos a la barra una traslación virtual en la dirección y (figura 5). El trabajo virtual resultante es:

$$\delta U = A_y \delta y + (-W) \delta y = (A_y - W) \delta y \quad (7)$$

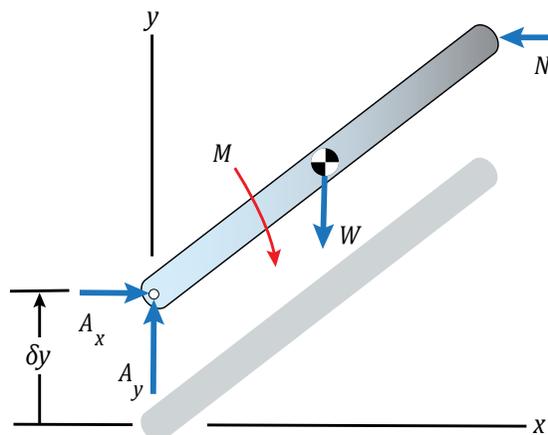


Figura 37. Desplazamiento virtual δy .
Fuente: Bedford, 2000, p. 559.

Según la ecuación (4), de nuevo el trabajo virtual es igual a cero.

Finalmente, damos a la barra un giro virtual manteniendo el punto A fijo (34a). Las fuerzas A_x y A_y no trabajan porque sus puntos de aplicación no se desplazan. El trabajo efectuado por el par M es $-M \delta\alpha$ porque su sentido es opuesto al del giro. En la figura 6b se muestran los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas N y W , en la figura 6c aparecen las componentes de las fuerzas en la dirección de los desplazamientos. El trabajo efectuado por N es $(N \text{sen} \alpha)(L\delta\alpha)$, y el trabajo efectuado por W es $(-W \text{cos} \alpha)(\frac{1}{2} L\delta\alpha)$. Luego, el trabajo total es

$$\delta U = (N \text{sen} \alpha)(L\delta\alpha) + (-W \text{cos} \alpha)(\frac{1}{2} L\delta\alpha) - M \delta\alpha$$

$$\delta U = (NL \text{sen} \alpha - \frac{1}{2} WL \text{cos} \alpha - M) \delta\alpha \quad (8)$$

De la ecuación (5), el trabajo virtual debido al giro virtual es también igual a cero.

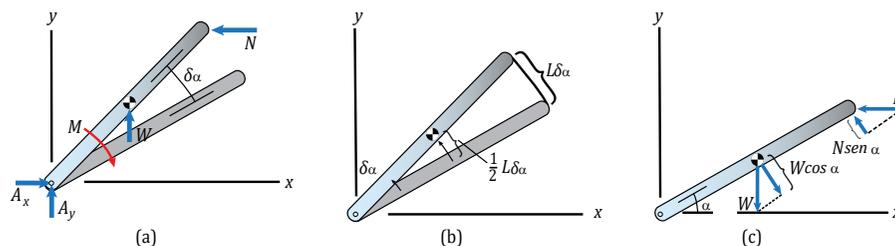


Figura 38. a) Giro virtual $\delta\alpha$, b) Desplazamientos de los puntos de aplicación N y W ,
c) Componentes de N y W en las direcciones de los desplazamientos.
Fuente: Bedford, 2000, 560.

Por tanto, de lo anterior, se mostró que, para tres desplazamientos virtuales de la barra, el trabajo virtual es cero. Estos resultados son ejemplos de una forma del principio del trabajo virtual:

Si un cuerpo está en equilibrio, el trabajo virtual efectuado por las fuerzas y los pares externos que actúan sobre él es cero para cualquier traslación o giro virtual:

$$\delta U = 0$$

Como lo ilustra nuestro ejemplo, este principio se puede utilizar para deducir las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo. Sometiendo la barra a traslaciones virtuales δx y δy y a un giro virtual $\delta \alpha$, se obtienen las ecuaciones (6) - (8). Como el trabajo virtual debe ser igual a cero en cada caso, obtenemos las ecuaciones (3) - (5). Sin embargo, no obtenemos ninguna ventaja con este método comparado con simplemente dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicarle las ecuaciones de equilibrio en la forma usual. Las ventajas del principio del trabajo virtual serán evidentes cuando consideremos estructuras.

3. Aplicación a estructuras

Gracias al principio del trabajo virtual enunciado en la sección anterior, tenemos aplicaciones al análisis de cada elemento de una estructura.

Sometiendo ciertos tipos de estructuras en equilibrio a desplazamientos virtuales y calculando el trabajo virtual total, podemos determinar las reacciones desconocidas en sus soportes, así como las fuerzas internas en sus elementos. El procedimiento implica encontrar un desplazamiento virtual que dé origen a la realización de trabajo virtual por parte de las cargas conocidas y por parte de una fuerza o un par desconocido.

Supongamos que queremos determinar la carga axial en la barra BD de la armadura de la figura 7a. Las otras barras de la armadura están sometidas a la carga de 4 kN y a las fuerzas ejercidas sobre ellas por la barra BD (figura 7b). Si damos a la estructura un giro virtual $\delta \alpha$ como se muestra en la figura 7c, entonces la fuerza T_{BD} que actúa en B y la carga de 4kN que actúa en C realizarán un trabajo virtual. Además, el trabajo virtual hecho por esas dos fuerzas es el trabajo virtual total hecho sobre los elementos de la estructura, pues el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas entre sí se cancela.

Por ejemplo, consideremos la junta (figura 7d). La fuerza T_{BC} es la carga axial en el elemento BC. El trabajo virtual realizado en C sobre el elemento BC es $T_{BC} (1.4 \text{ m}) T_{BC} (1.4\text{m})\delta \alpha$. Cuando sumamos el trabajo virtual realizado sobre los elementos para obtener el trabajo virtual total sobre la estructura, el trabajo virtual debido a la fuerza interna T_{BC} se cancela. (Si los elementos ejercen un par interno entre sí en C, por ejemplo, como resultado de la fricción en el soporte de pasador, el trabajo virtual no se cancelaría) (Bedford, 2000, p. 561).

Por consiguiente, podemos ignorar las fuerzas internas al calcular el trabajo virtual total sobre la estructura. Entonces, obtenemos lo siguiente:

$$\delta U = (T_{BD} \cos \theta)(1.4\text{m})\delta \alpha + (4\text{kN})(1.4\text{m})\delta \alpha = 0$$

$$\text{El ángulo } \theta = \arctan (1.4/1) = 54.5^\circ$$

Finalmente, resolviendo la ecuación indicada, obtenemos:

$$T_{BD} = -6.88 \text{ kN}$$

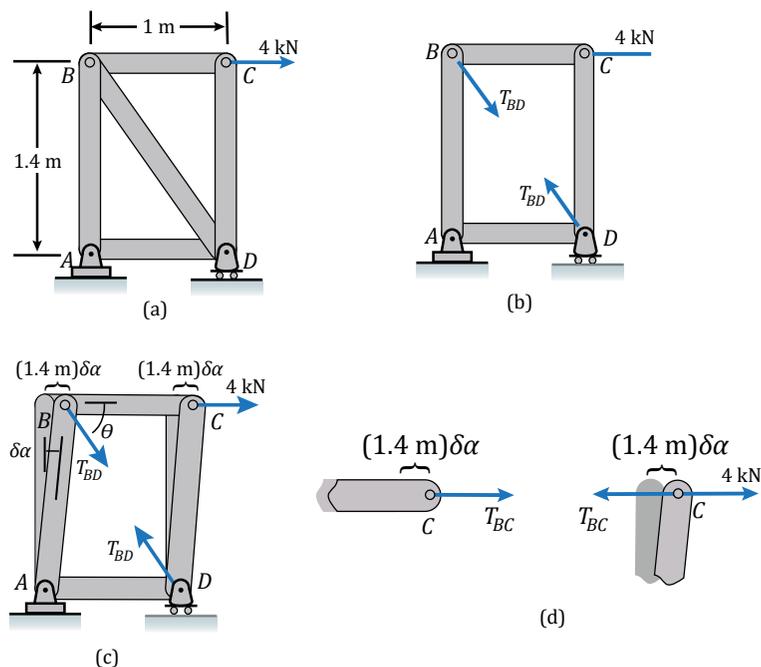


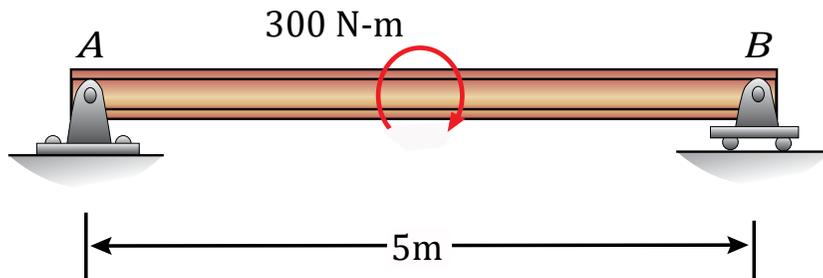
Figura 39. a) Armadura con carga, b) Fuerzas ejercidas por la barra BD, c) desplazamiento virtual de la estructura d) Cálculo del trabajo virtual sobre las barras BC y CD en la junta C.

Fuente: Bedford, 2000, 561.

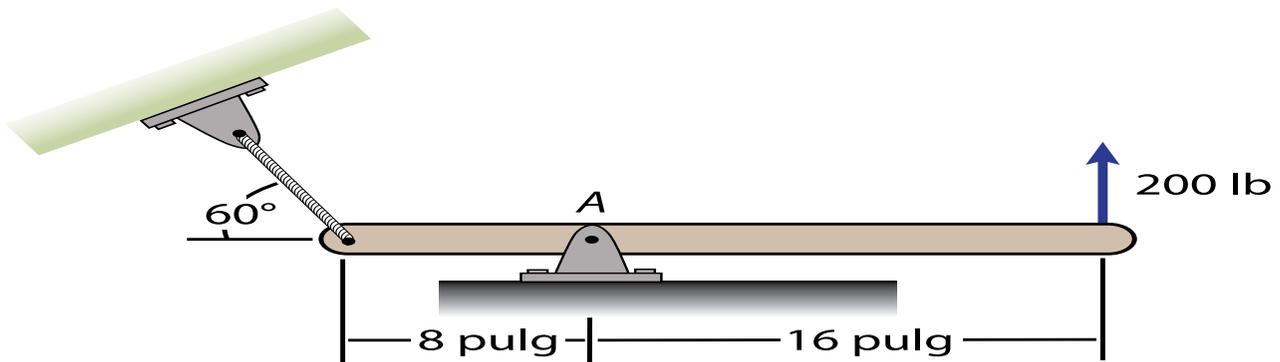
Actividad N.º 4

Aplique el principio del trabajo virtual para determinar las fuerzas en estructuras.

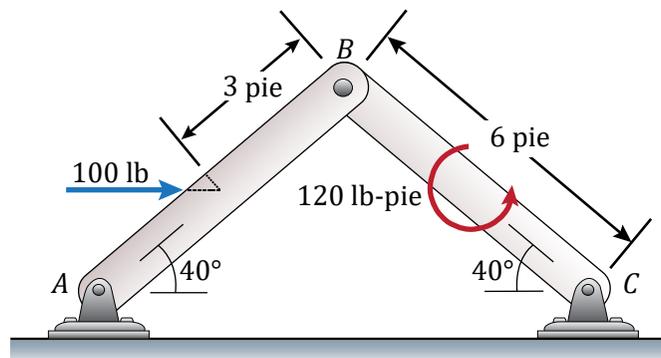
1. Determine la reacción en el punto B de la figura. Estrategia: Someta la viga a un giro virtual respecto al punto A.



2. Determine la tensión en el cable mostrado.

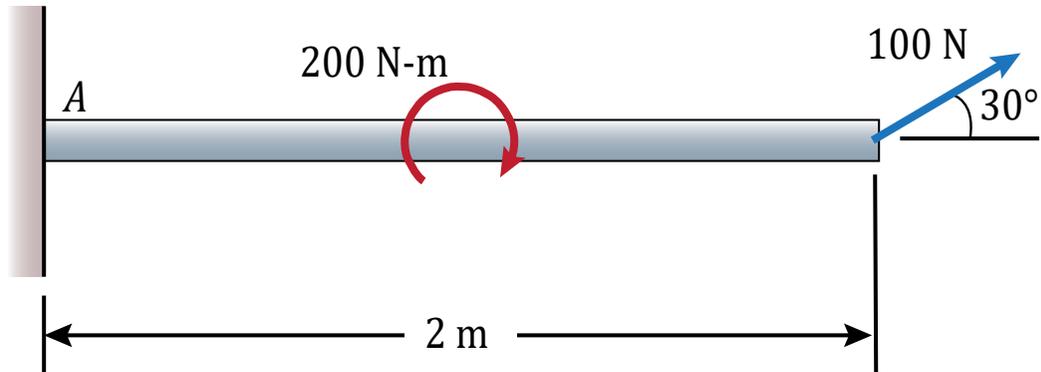


3. En la estructura de la figura, use el principio del trabajo virtual para determinar la reacción horizontal en C.

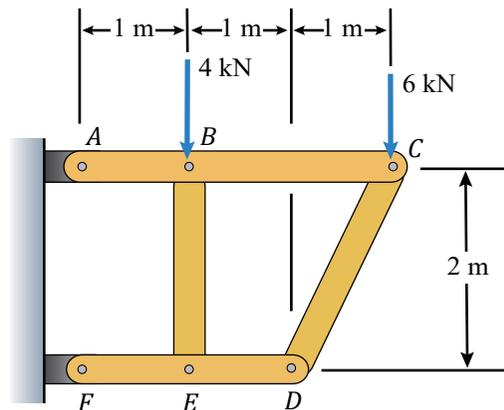


4. Para la estructura mostrada:

- Determine el par ejercido sobre la viga en A.
- Determine la fuerza vertical ejercida sobre la viga en A.



El mecanismo mostrado está en equilibrio. Determine la fuerza R en función de F.



Lectura seleccionada n° 4: El puente golden gate de san francisco

Rodríguez, E. (2013). El puente Golden Gate de San Francisco. *Fieras de la ingeniería*. Disponible en <http://www.fierasdeingenieria.com/el-puente-golden-gate-de-san-francisco/>



Glosario de la Unidad VI

1. Cargas internas

En un elemento estructural actúan cargas externas, concentradas o distribuidas, las que actúan sobre el elemento y producen efectos internos, al interior del elemento ocurren efectos que son importantes de conocer, puesto que mejora el diseño de un elemento evitando deformaciones no deseadas.

2. Cable con carga concentrada

Cable que soporta o suspende cargas en puntos específicos a lo largo de su longitud, inclusive en sus extremos. Su análisis en ocasiones desprecia el peso del propio cable.

3. Cables con carga distribuida

Cable que soporta cargas que actúan en forma distribuida en toda la extensión del cable o a lo largo de cierta extensión del mismo.

4. Fuerza cortante

Fuerza causante de la rotura o quiebre de un elemento estructural. Esto se debe a las cargas externas que actúan sobre el elemento y producen efectos internos, entre ellos el corte, que consiste en una desviación transversal, es decir, la rotura.

5. Momento flector

Momento causante de la flexión de un elemento estructural. Esto se debe a las cargas externas que actúan sobre el elemento y producen efectos internos, entre ellos la flexión, que consiste en un encorvamiento transversal.

6. Momento de inercia de un área

La propiedad del área de una sección transversal que determina la resistencia a la flexión respecto a un eje particular de una viga se denomina momento de inercia del área.

7. Teorema de los ejes paralelos

Teorema que relaciona los momentos de inercia de un cuerpo respecto a un eje cualquiera con los momentos de inercia del mismo respecto a los ejes que pasan por su centroide.

8. Trabajo. Trabajo mecánico

Consideremos una fuerza que actúa sobre un cuerpo en un punto dado y que esta fuerza logra el desplazamiento de este cuerpo, entonces decimos que la fuerza ha realizado trabajo mecánico.

9. Trabajo virtual

El principio del trabajo virtual es un enunciado sobre el trabajo efectuado por fuerzas y pares cuando un cuerpo o estructura está sometido a movimientos.

10. Viga

Elemento estructural diseñado para soportar cargas variables, concentradas o distribuidas.



Bibliografía de la Unidad IV

Bedford, F., & Fowler, W. (2000). *Mecánica para ingeniería: Estática*. México: Addison Wesley Iberoamericana.

Bedford, F., & Fowler, W. (2007). *Mecánica para ingeniería: Estática*. (3a ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana.

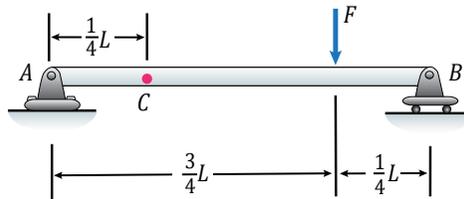
Beer, F., Johnston, E., & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. (10a ed.). México: McGraw-Hill.

Hassler, R. (2012). *Estructuras de acero*. (5a ed.). México: Longman.

Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Autoevaluación N.º 4

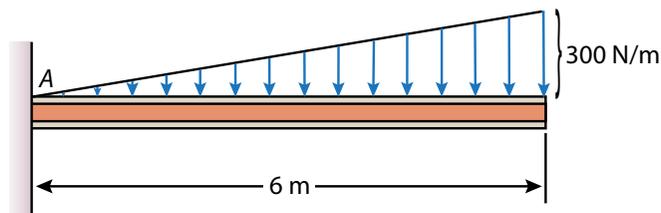
1. Determine la fuerza cortante en el punto C de la viga si $F = 40\text{N}$ y $L = 16\text{m}$.



- A. 10N
 - B. 20
 - C. 30
 - D. 40
 - E. 80
2. En el problema anterior determine el momento flector en el punto C.

- A. 10Nm
- B. 20
- C. 30
- D. 40
- E. 80

3. Para la viga en voladizo mostrada, determine la magnitud de la fuerza cortante máxima.



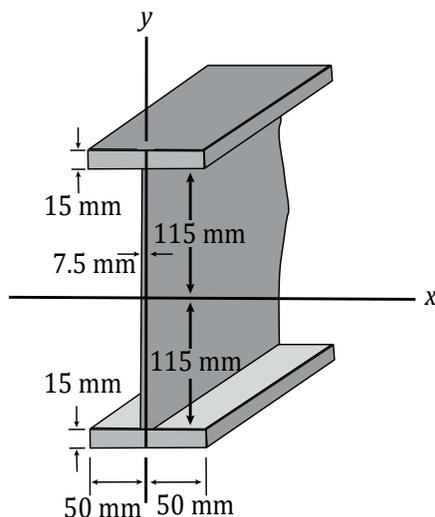
- A. 900N
 - B. 200
 - C. 300
 - D. 400
 - E. 800
4. En el problema anterior determine el momento flector en el punto C.
- A. 3600 Nm
 - B. 2000
 - C. 3000
 - D. - 4000
 - E. 8000

5. El cable usado para suspender la base lineal del puente sobre el río tiene dos torres separadas 36m que soportan dicho cable. El punto más bajo del cable está a 1,4m debajo de la parte superior de las torres. La masa de la base lineal suspendida es 2700 kg. Determine el valor de la tensión máxima en el cable.



- A. 560.6N
B. 200.7
C. 86 200
D. 40 000
E. 80 567
6. En el problema anterior, ¿cuál es la longitud del cable suspendido?
- A. 56.66 m
B. 20.75
C. 36.14
D. 40.00
E. 80.56

Considere para los problemas 7 y 8 la siguiente figura:

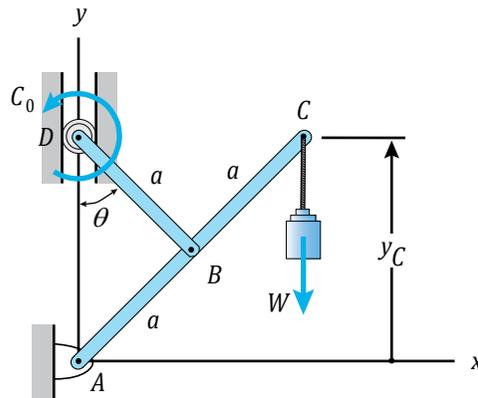


7. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje x.
- A. $52.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$
B. 20.8
C. 36.1
D. 40.0
E. 2.51

8. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje y .

- A. $52.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$
- B. 20.8
- C. 36.1
- D. 40.0
- E. 2.51

Considere para los problemas 9 y 10 la siguiente figura:



Siendo $W = 100 \text{ lb}$, $a = 4 \text{ m}$ y cuando $\theta = 30^\circ$, ignore los pesos de las barras.

9. Calcule el par C_0 que soportará la carga W (en sentido horario).

- A. 100 Nm
- B. 300
- C. 361
- D. 400
- E. 251

10. Calcule el par C_0 que soportará la carga W si $\theta = 40^\circ$.

- A. 347.1 Nm
- B. 300,2
- C. 361.3
- D. 405.4
- E. 251.5

NOTA: Los ejercicios han sido extraídos de los textos siguientes:

- **No hay ninguna fuente en el documento actual.**
- **No hay ninguna fuente en el documento actual.**
- Hibbeler, R. (2013). *Mecánica para ingenieros. Estática*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

Anexo


UNIDAD I

Número	Respuestas
1	B
2	A
3	A
4	E
5	D
6	A
7	B
8	B
9	D
10	E


UNIDAD II

Número	Respuestas
1	B
2	B
3	C
4	D
5	E
6	A
7	B
8	A
9	B
10	C

UNIDAD III

Número	Respuestas
1	C
2	B
3	E
4	D
5	D
6	B
7	C
8	B
9	A
10	B

UNIDAD IV

Número	Respuestas
1	A
2	D
3	A
4	A
5	C
6	C
7	A
8	E
9	D
10	A





Huancayo

Av. San Carlos 1980 – Huancayo

Teléfono: 064 - 481430

Lima

Jr. Junín 355 – Miraflores

Teléfono: 01 - 2132760

Cusco

Av. Collasuyo S/N Urb. Manuel Prado – Cusco

Teléfono: 084 – 480070

Arequipa

Calle Alfonso Ugarte 607 – Yanahuara

Oficina administrativa: Calle San José 308 2º piso - Cercado

Teléfono: 054 - 412030